סיכומים באינפי

כללי האינסוף:

* $\infty + \infty = \infty$
* $\infty \pm a = \infty$
* $\infty \cdot a = \infty$
* $\infty \cdot \infty = \infty$
* $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
* $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$
* $\infty^2 = \infty$
* $\sqrt{\infty} = \infty$
* $a^{-\infty} = 0$

* $e^{\infty} = \infty$
* $e^{-\infty} = 0$
* $\ln \infty = \infty$
* $\ln 0^+ = -\infty$
* $\frac{a}{0^-} = -\infty$
* $\frac{a}{0^+} = \infty$
* $\frac{0}{a} = 0$
* $\frac{\infty}{a} = \infty$
* $\frac{0}{\infty} = 0$
* $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

חישוב גבולות:

* $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
* $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
* $a^{\infty} = \begin{cases} 0 & 0<a<1 \\ \infty & a>1 \end{cases}$

מצבים לא מוגדרים והפתרון:

* $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} =$ שואף לאינסוף
  - חילוק בחזקה הגבוהה במכנה
* $\lim_{x \to a} \sqrt{\text{ביטוי}} =$ שואף למס' מסוים
  - הכפלה בביט' הצמוד
* $\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} =$ שואף למס' מסוים
  - חילוקת פולינומים או פירוק לגורמים
* $\frac{a}{0} =$
  - מוצאים את הגבול מימין ומשמאל $\frac{a}{0^-} = -\infty$, $\frac{a}{0^+} = \infty$
  אם הגבולות משני הצדדים לא זהים אז אין גבול. (יש אסימפטוטה)
* $\frac{0}{0} =$
  - פירוק לגורמים, להוציא גורם של $(x-a)$
  הגורם שמופיע יצטמצם (יש חור)

Scanned with CamScanner

בס״ד

סיכומים באינפי'

גבולות ידועים:

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{bx}{\sin(bx)} \cdot \frac{\sin(ax)}{ax} \cdot \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin ax}{ax} = a$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

* $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

* $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{\square})^{\square} = e$:המקרה הכללי

כאשר יש 1^∞ כנראה שזה המקרה

* $\lim\limits_{x\to 0^+} x = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$ אין גבול!

זהות חשובה!

$\cos 2x = \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x$

המשך

סיכומים באינפי'

<u>אינטגרלים</u>

* כשיש לי אינטגרל שמעלת המונה גדולה ממעלת המכנה נעשה חילוק פולינומים.
* כאשר יש לי במונה משהו שמזכיר את הנגזרת של המכנה נעשה השלמה לנגזרת ואז נעשה אינטגרל.
* השלמה לריבוע: $x^2+bx+\frac{b^2}{4}=(x+\frac{b}{2})^2$
* אינטגרציה בחלקים:

$$fg+c=\int(fg)'=\int(f'g+fg')=\int f'g+\int fg'$$

משפט אינטגרציה בחלקים: $\int fg'=fg-\int f'g$

* כאשר יש לנו מכפלה של פונקציות נעשה אינטגרציה בחלקים, נחליט מי הf ומי הg לפי מי שקל לעשות אינטגרל ולפי מי שקל לגזור
* לכל פונקציה רציפה יש פונק' קדומה.
* נוסחת ניוטון לייבניץ (f הפונק', F הפונק' הקדומה).

f רציפה ולכן יש לה פונק' קדומה F, לפי ניוטון לייבניץ

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ $\qquad A=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

<u>משפטי הנגזרות</u>

* <u>משפט ויירשטרס</u> - פונק' הרציפה בקטע סגור מקבלת בו את ערכה המקסימלי וערכה המינימלי בקטע.
* <u>מסקנה ממשפט לגרנז'</u> - אם לשתי פונק' יש נגזרות המתלכדות בקטע מסוים אז שתי הפונק' נבדלות זו מזו בקבוע.
* <u>משפט ויירשטרס</u> - פונק' הרציפה בקטע סגור - חסומה בו.
* <u>מסקנה ממשפט ערך הביניים</u> - אם פונק' רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וכן $f(a)$, $f(b)$ שוני סימן אז קיים $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=0$

כלומר למשוואה $f(x)=0$ קיים לפחות פתרון אחד.

(מראים שהפונק' רציפה ושיש לה 2 נק' שוני סימן ואז משתמשים במשפט).

בס"ד

סיכומים באינפי'

משפטים להוכחה:

* משפט הסנדוויץ' -

נתונות סדרות (a_n), (b_n) ו-(c_n) המקיימות:

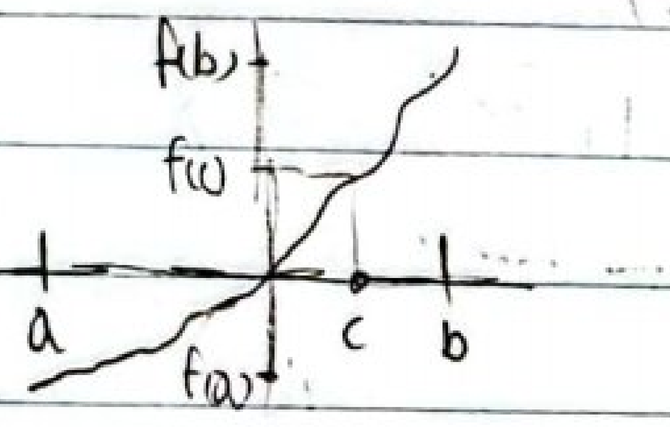
א) קיים מס' ממשי כך שלכל $N<n$ טבעי מתקיים:

$$a_n \le c_n \le b_n$$

ב) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ כלומר הם מתכנסות לגבול אחד

אז גם c_n סדרה מתכנסת לגבול אחד L $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

* משפט ערך הביניים -



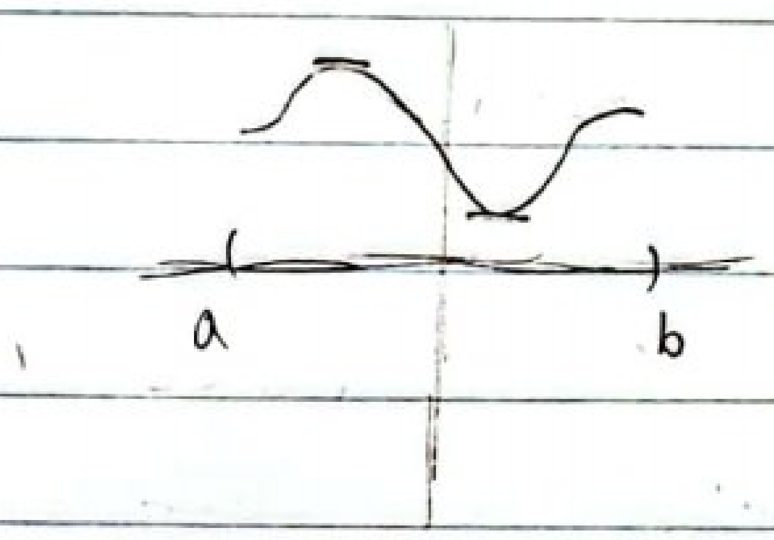
אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $f(a) \neq f(b)$

אז לכל ערך y בין $f(a)$ ל $f(b)$

קיים $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=y$

(כלומר כאשר פונק' רציפה מקבלת שני ערכים שונים היא תקבל כל ערך שביניהם).

* משפט פרמה -



תהי f פונק' המוגדרת בקטע הפתוח (a,b)

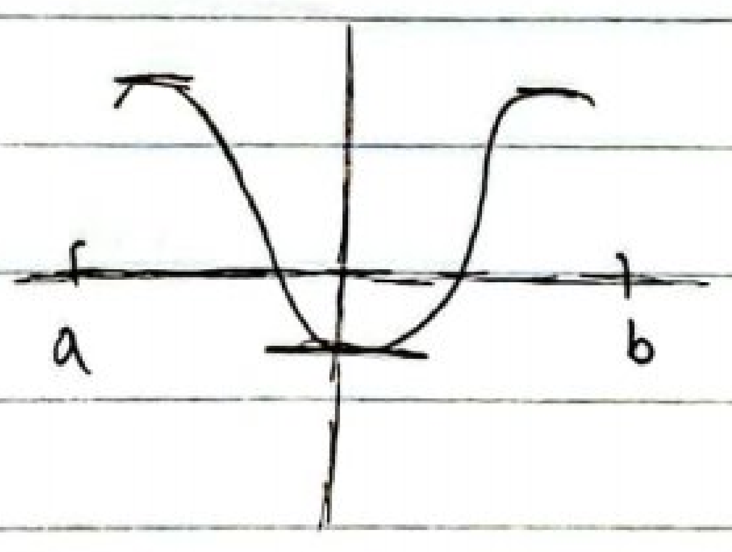
ותהי $x_0\in(a,b)$, אם f גזירה ב x_0

ומקבלת בנקודה זו את ערכה המקסימלי או

המינימלי אז $f'(x_0)=0$

(בהוכחה מוכיחים שבגלל שהפונק' גזירה הגבולות החד צדדיים שווים לגבול, אם פונק' זו הפונק' מקסימלית אז הגבול מימין הוא שלילי והגבול מצד שמאל חיובי - יגדול מ-0 ולכן חייב להיות שהגבול הוא 0).

* משפט רול -



אם $f(x)$ פונק' רציפה המקיימת:

א) $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$

ב) $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b)

ג) $f(a)=f(b)$

אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=0$

Scanned with CamScanner

בס״ד

סיכומים באינפי

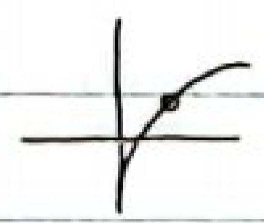
רציפות של פונקציה

- כדי שפונקציה תהי רציפה בנק' ח״ב להיות לה גבול בנק'
ח״ב להיות לה ערך בנקודה
וערך הגבול ח״ב להיות שווה לערך הפונקציה.
כלומר, F תקרא רציפה בנק' $x=a$ אם:

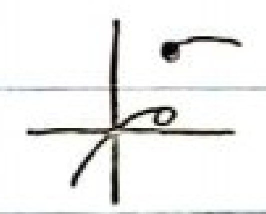
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

סוגי אי רציפות:

1) **סליקה** $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \neq f(x)$
או ש$f(a)$ לא קיים



2) **קפיצה** $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$



3) **סוג שני** $\lim_{x\to a^-,\, a^+} f(x) = \pm\infty$
כאשר אחד מהגבולות שווה לפלוס/מינוס אינסוף

משפט: פונק' רציונלית היא רציפה פרט לנקודות בהן המכנה מתאפס.

נגזרת של פונקציה

לפי הגדרה:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ובנק' a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{או} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

אם לפונק' יש נגזרת בנק' a
הפונק' גזירה בוודאי בנק' a (כלומר הגבול קיים וסופי)
הפונק' רציפה בוודאי בנק' a

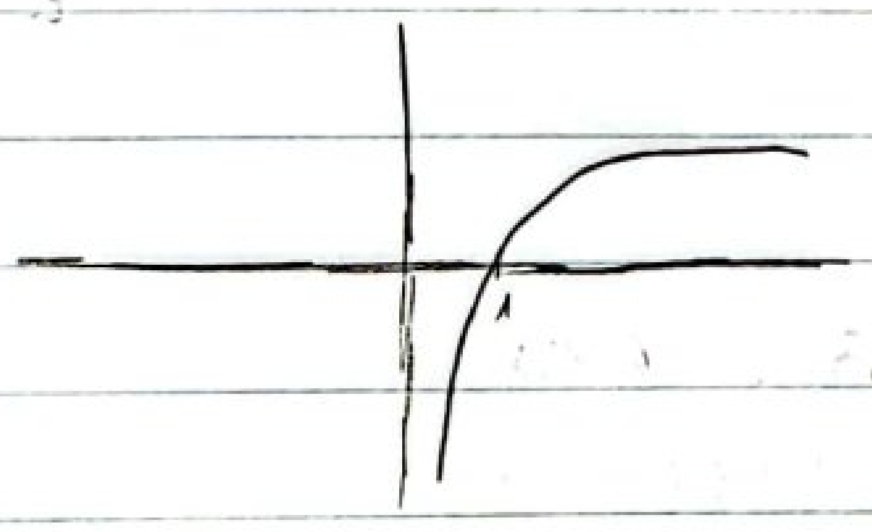
* אם f רציפה בנקודה a כדי שהפונק' תהיה גזירה בנק' a צריך שהגבול מימין ומשמאל לנקודה יהיה שווה (וסופי, כלומר שווה לשני מספרים לא גבול קיים וסופי).
* כאשר שואלים באילו נקודות הפונק' גזירה -
נחשב נגזרת לפי הנוסחה הכללית. נקבל תוצאה ונראה עבור אלו ערכי x הגבול (התוצאה) לא תהיה קיימת וסופית (עפ״י הגדרה) ובנק' האלו הפונק' לא גזירה.

בס"ד

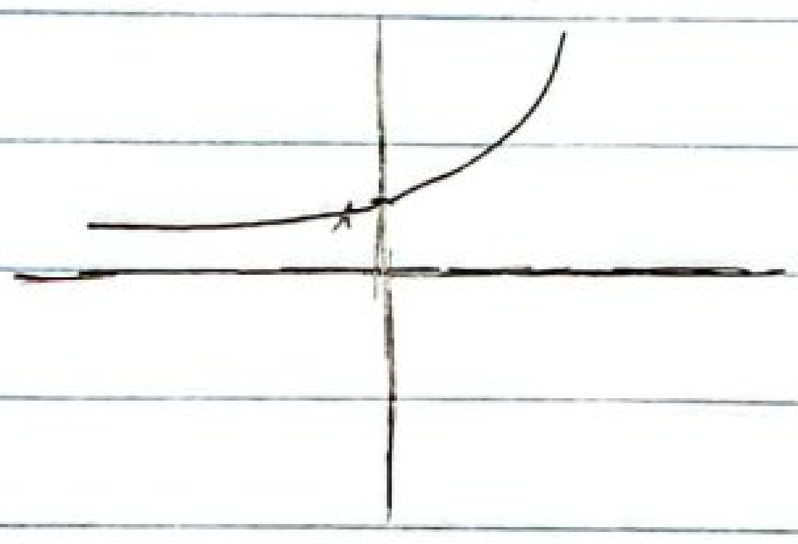
סיכומי אינפי

גרפים של פונקציות

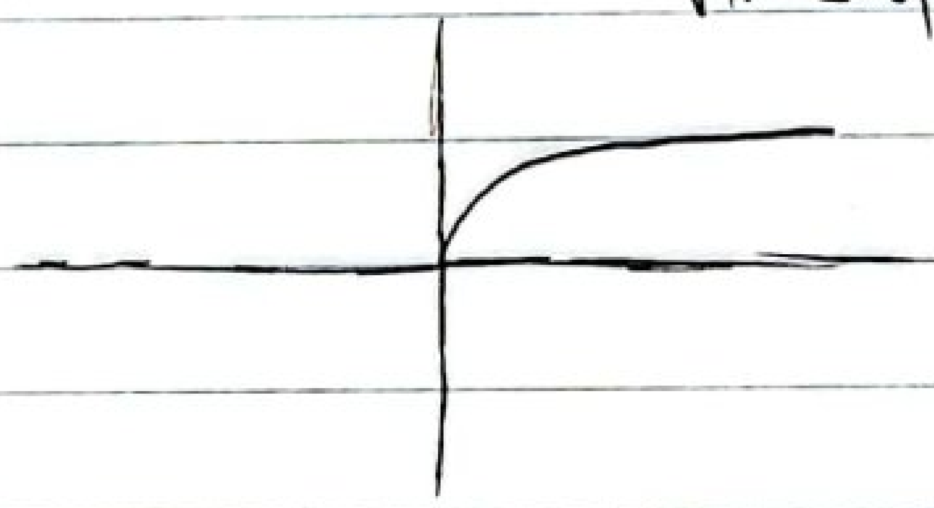
פונקציית $\ln x$



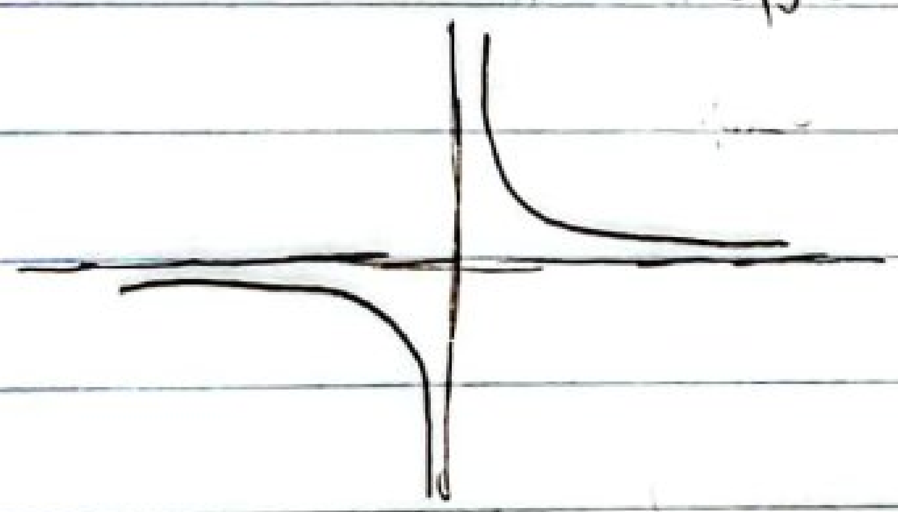
פונקציית e^x



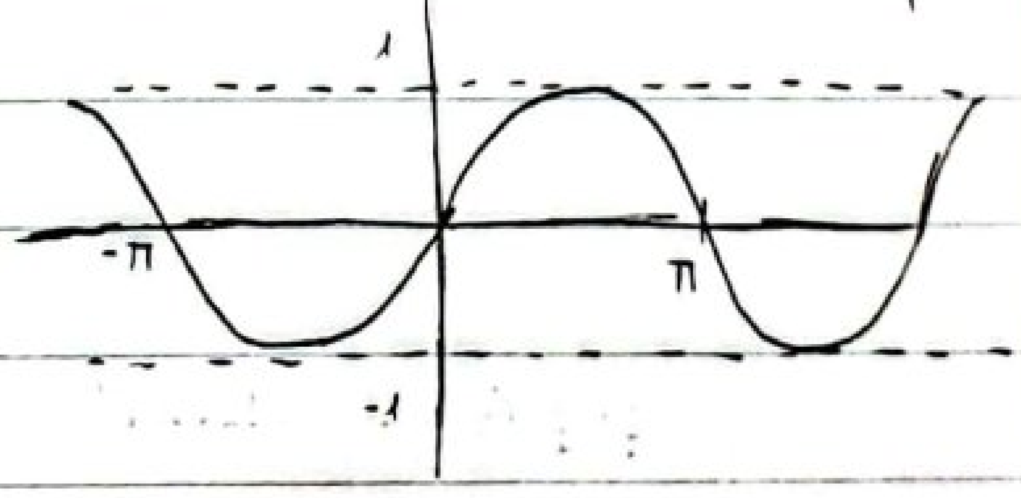
פונקציית $\sqrt{x}$



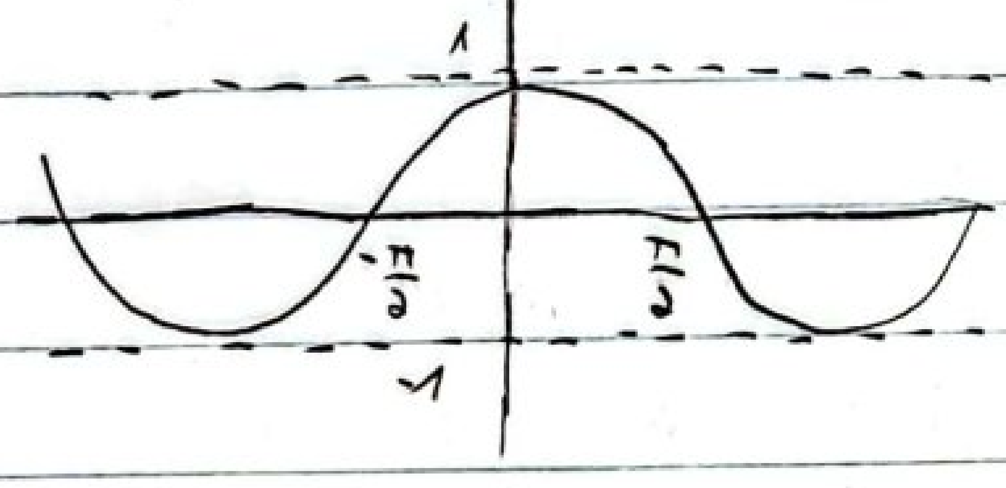
פונקציית $\frac{1}{x}$



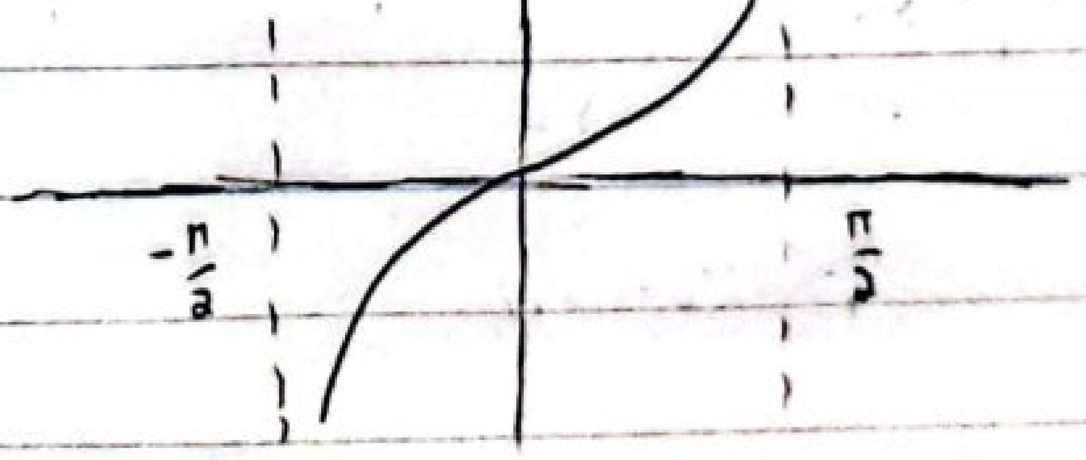
פונקציית $\sin x$



פונקציית $\cos x$

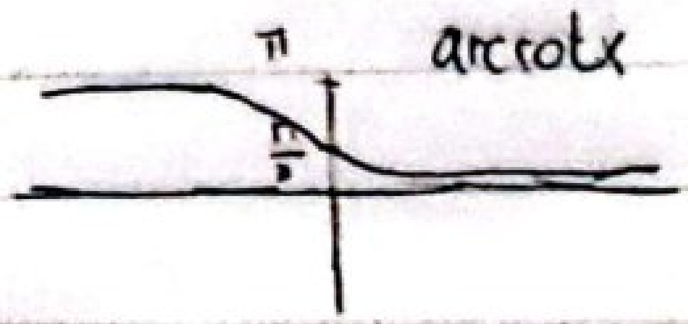


פונקציית $\tan x$

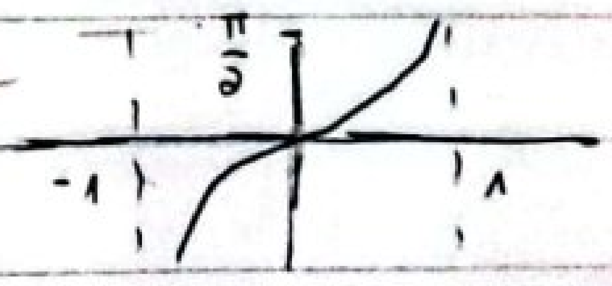


פונקציות הפוכות

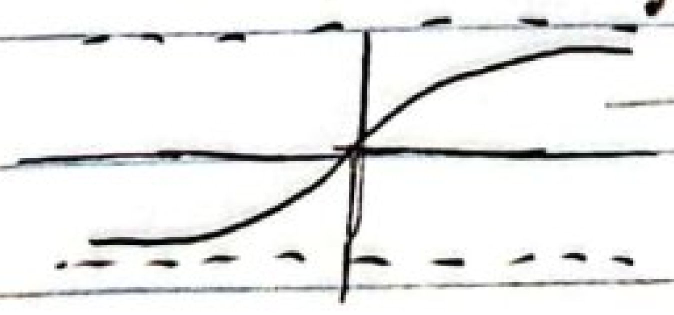
$\operatorname{arccot} x$



$\arcsin x$



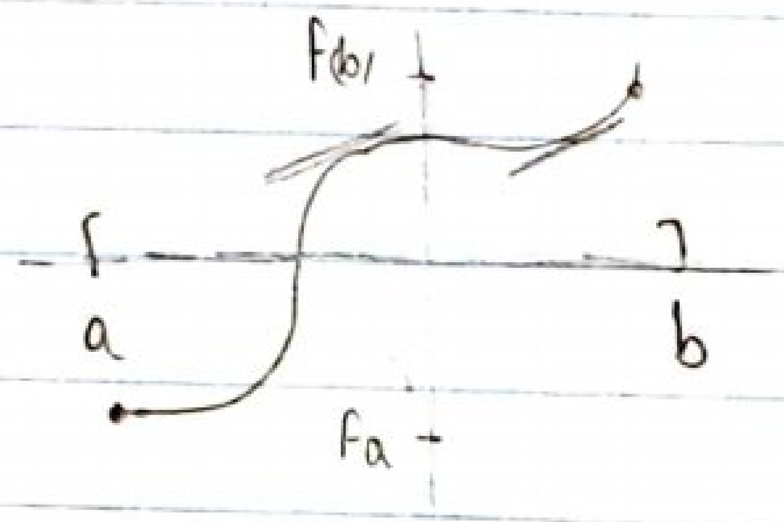
$\arctan x$



סיכומי אינפי

משפטים להוכחה

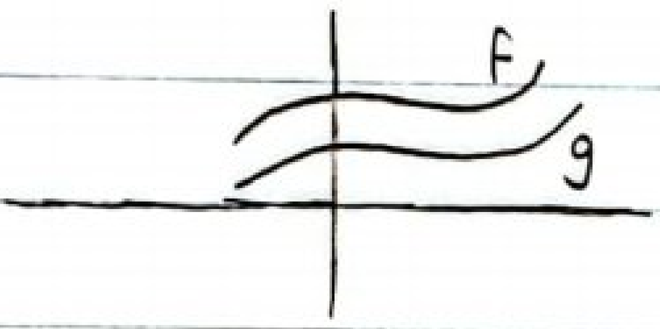
- משפט לגרנז׳:



אם $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$
וגזירה בקטע הפתוח (a,b)
אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$
כך ש: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

מסקנות ממשפט לגרנז׳:

1) אם f פונק׳ גזירה ב(a,b)
ו $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c$
(כלומר הפונק׳ נבדלות ע״י מס׳ קבוע)



2) אם g,f פונק׳ גזירות בקטע
(a,b) ומתקיים שלכל x בקטע
$g'=f'$ אז $f=g+c$

3) תהי f פונק׳ רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b)
א אם $0<f'(x) \Rightarrow f$ עולה בקטע
אם $0>f'(x) \Rightarrow f$ יורדת בקטע
אם $0\le f'(x) \Rightarrow f$ עולה במובן החלש
אם $0\ge f'(x) \Rightarrow f$ יורדת במובן החלש

Scanned with CamScanner

קסין

סיכומים באינפי'

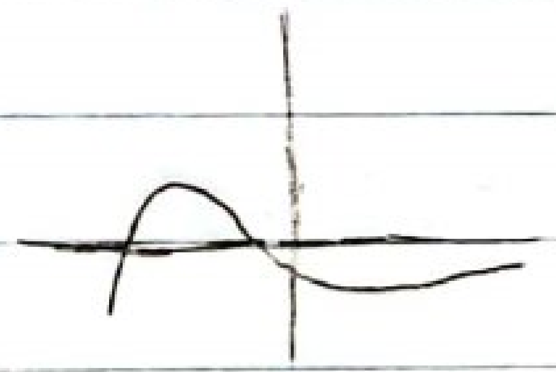
נגזרת של פונק' - הערות

* אם פונק' לא מוגדרת בנק' מסוימת אז בוודאי שהיא לא גזירה באותה נק'.
* אם פונק' גזירה בנק' מסוימת אז היא רציפה בה.
* => אם פונק' לא רציפה בנק' מסוימת אז היא לא גזירה בה.

אבל אם פונקציה רציפה בנק' לא ניתן להסיק שהיא גזירה בה.
למשל: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ רציפה אך לא גזירה ב $x=0$.

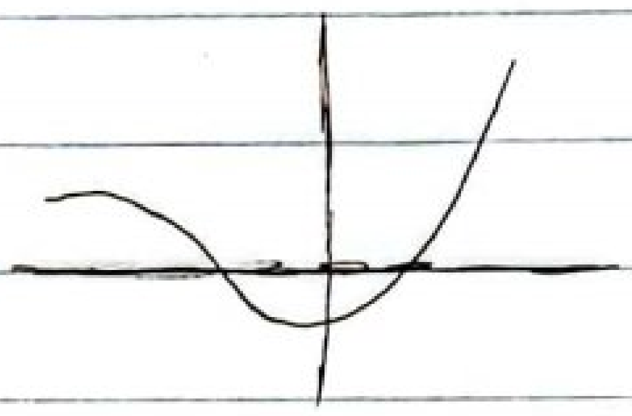
* מסקנה ממשפט רול: אם הפונק' $f(x)$ חותכת את ציר ה-x פעמיים אז הנגזרת שלה f' חותכת את ציר ה-x לפחות פעם אחת.
* כדי למצוא נק' פיתול של פונק' נחפש את הנקודות שבהן הנגזרת השניה שווה ל-0, הם חשודות לפיתול, כאשר $f''>0$ הפונק' מחייכת - קמירות וכאשר $f''<0$ הפונק' עצובה - קעירות.
* בנק' אי רציפות הפונק' לא גזירה

גבול של פונקציה - הגדרה



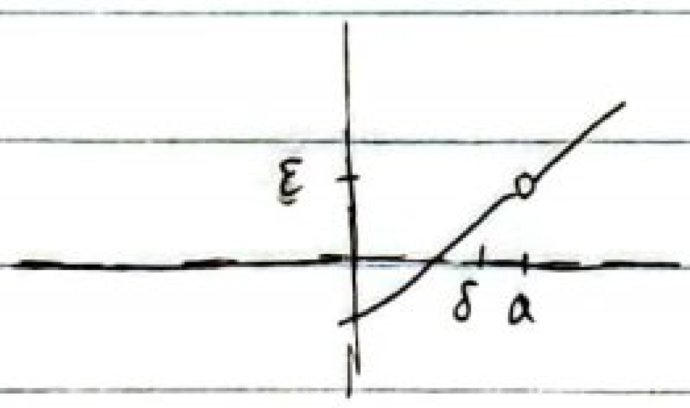
* גבול סופי באינסוף - $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $B\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x>B$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$



* גבול אינסופי באינסוף - $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

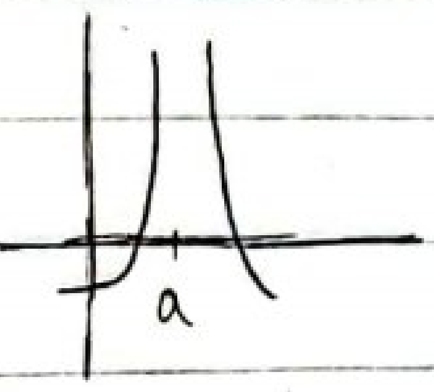
צ"ל שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $B\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x>B$ מתקיים $f(x)>M$



* גבול סופי בנקודה - $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$

צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$

הערה: עבור a^+: $x-a<\delta$, עבור a^-: $-\delta<x-a$



* גבול אינסופי בנקודה - $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$

צ"ל שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $|x_0-x|<\delta$ מתקיים $f(x)>M$