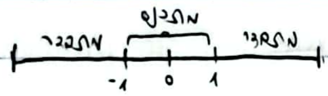
אפרת אזרין

אינפי 2 - סיכום.

* טורים

- <u>משפט לייבניץ</u>: אם הטור מתחלף ומתקיים a_n סדרה חיובית יורדת והגבול $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ אז הטור המתחלף מתכנס עפ"י לייבניץ.
- הטור מתכנס בהחלט אם טור הערכים המוחלטים גם מתכנס.
- הטור מתכנס בתנאי אם טור הערכים המוחלטים מתבדר והטור מתכנס לפי לייבניץ.
- אם טור הערכים המוחלטים מתבדר וגם הטור מתבדר לפי לייבניץ אז הוא מתבדר.
- <u>מבחן המנה</u> (D'Alembert): $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
- אם $L=|x|<1$ הטור מתכנס
- אם $1<|x|=L$ הטור מתבדר
- אם $L=1$ אין דעה



- <u>טור גאומטרי - סדרה הנדסית יורדת</u> $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$
- כאשר $|q|\ge 1$ הטור מתבדר
- כאשר $|q|<1$ (כלומר $-1\le q\le 1$) הטור מתכנס. $\lim S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q^n}$
עבור $|q|<1$ הטור מתכנס ל $S=\frac{a}{1-q}$
- <u>מבחן האינטגרל</u> $\sum_{a=n}^{\infty} a_n$
$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ טור חיובי, נסמן $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ ונניח $f(n)=f(x)$ אם $f(x)$ רציפה ויורדת בתחום $x\ge N$ אז הטור והאינטגרל $\int_N^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים\\מתבדרים יחדיו.
- <u>טור הרמוני מוכלל (מבחן p - מבחן החזקה)</u> הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$
- מתכנס עבור $p>1$
- מתבדר עבור $p\le 1$
- <u>מבחן ההשוואה</u>: נניח ש: $0\le b_n\le a_n$ אז:
- אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס
- אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

כלומר במילים אם הגדול מתכנס אז הטור הקטן בהכרח יתכנס
ו\\ אם הטור הקטן מתבדר אז הטור הגדול בהכרח יתבדר.

<u>משפטים בסיסיים להתכנסות טורים</u>:

* השמטת/הוספת מס' סופי של איברים אינה משנה את התכנסותו/התבדרותו של הטור
* אם c מס' ממשי שונה מ-0 אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ מתכנסים/מתבדרים יחדיו.
* חיבור/סכום של טורים מתכנסים הוא גם טור מתכנס.

בס"ד

תמפק סיכום ·

* טורים

- <u>מבחן ההשוואה הגבולי:</u> $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
- אם $L=a$ (מס׳ שונה מ-0) הטורים מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- אם $L=\infty$ $(b_n < a_n)$ אם Σa_n מתכנס גם Σb_n מתכנס.
  אם Σb_n מתבדר גם Σa_n מתבדר.
- אם $L=0$ $(a_n < b_n)$ אם Σb_n מתכנס גם Σa_n מתכנס
  אם Σa_n מתבדר גם Σb_n מתבדר.

חשוב לזכור!

* אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז הטור מתבדר! עפ״י תנאי הכרחי להתכנסות.

* אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא בהכרח יתכנס כי לא מבטיח התכנסות (לא ודאי).

* אם $R=a$ אז הטור לא בהכרח מתכנס ב $-a \leq x \leq a$ (צריך לבדוק קצוות).

* בטורי חזקות כשבודקים תחום ורדיוס התכנסות נשתמש במבחן המנה.

* רדיוס ההתכנסות שווה ל $\frac{1}{\text{הגבול}}$ כלומר [illegible] $= \frac{1}{L} = R$.

* כאשר יש לנו עשה גם או נשתמש במבחן האינטגרל.

* אם טור הערכים המוחלטים מתכנס אז גם הטור מתכנס בהחלט.

* הטור המתקבל לאחר אינטגרציה/גזירה יהיו בעל אותו רדיוס התכנסות של הטור המקורי.

* טורי טיילור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

* טורי מקלורין $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

בס"ד

חשק סיכום - לזכור!

* תחום פתוח - מכיל רק נק' פנימיות (לדוג': $x^2+y^2<1$)
* תחום סגור - מכיל גם את כל נק' השפה (לדוג': $x^2+y^2\le 1$)
* תחום הגדרה - איפה הפונק' מוגדרת, כלומר מה x, y יכולים להיות.
* תחום השתנות - אוסף ערכי ה z שהפונק' יכולה לקבל.
* תחומי השתנות של סינוס הוא בין $-1 \le \sin(x+y) \le 1$
* פונק' רציפות ב2 משתנים או יותר:

הגדרת רציפות: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

שיטות להוכחה:

- צמצום כך שאפשר להציב ישירות:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0$$

- החלפת משתנים במשתנה אחד ואז פתירה כמו בחדו"א 1:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \underset{t=x^2+y^2}{\text{נבחר:}} \Rightarrow \lim_{t\to0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \overset{L.H}{=} \frac{\sin(t)}{2t}$$

$$\overset{L.H}{=} \lim_{t\to0} \frac{\cos(t)}{2} = \frac{1}{2}$$

- משפט הסנדוויץ' (בעיקר כשיש סינוס או cos)
- שיטת המסילה כדי להגיע לנקודה המבוקשת בדרכים שונות כגון $y=f(x)$ מראים שהגבול תלוי במשתנה m ולכן הגבול לא קיים.

* חישוב נגזרות חלקיות לפי x - $f'_x = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

כאשר הגבול קיים וסופי.

* כלל השרשרת:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

* אם נתונה $f(x,y)=0$ משוואה המגדירה את y כפונק' גזירה של x אז:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

המשך סיכום - לזכור!

* אינטגרל קווי - סוג ראשון

- עקומה/מסילה $r(t)=(x(t),y(t))$ - פונקציה $f(x,y)$

$$\int_r f(x,y)\,ds=\int f(x(t),y(t))\cdot\|r'(t)\|\,dt$$
$$=\int f(x(t),y(t))\cdot\|(x'(t),y'(t))\|\,dt$$

* אינטגרל קווי - סוג שני (מחשבים עבודה)

- מסילה $r(t)=(x(t),y(t))$
- שדה $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$

$$\int_r F(x,y)\,ds=\int_b^a F(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt$$

* אינטגרל קווי: $t*(\text{נק' סיום})+(1-t)*(\text{נק' התחלה})$

* שדה משמר: $\vec{F}$ שדה משמר המוגדר על תחום פשוט D מתקיימות השקילויות:

א) $\oint\vec{F}\,dr=0$ עבודה במסלול סגור שווה לאפס.

ב) $\int_{A}^{B}\vec{F}\,dr$ אינט' תלא' במסלול המחבר את הנק' A ו B.

ג) קיימת פונק' פוטנציאל Φ המקיימת $\vec{\nabla}f=\vec{F}$

ומתקיים: $\int_{A\to B}\vec{F}\,dr=\underset{\text{נק' סיום}}{f(B)}-\underset{\text{נק' התחלה}}{f(A)}$

3) אם F שדה וקטורי על תחום פשוט קשר אז $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ כלומר $\text{Curl}=0$.

* שדה משמר במרחב - שדה וקטורי $\vec{F}=Pdx+Qdy+Rdz$ מוגדר וגזיר ברציפות בתחום Ω, $\vec{F}$ משמר אמ"מ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$ כלומר $\text{Curl}=0$

* כדי למצוא פונק' פוטנציאל ל F עושים אינטגרל לפי x וגוזר לפי y ואז בודקים ויש c שגורמו השוויון נשמר (או אינטגרל לפי x וגוזר לפי y).

* אם מתקיים השוויון $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ והתחום ההגדרה של הנגזרות הוא פשוט קשר אזי => שהשדה משמר.

* בפונק' סקלרית מתקיים השוויון (הכיוון לא משנה)
$$\int_c f(x,y,z)\,dL=\int_{-c} f(x,y,z)\,dL$$

* בפונק' וקטורית מתקיים השוויון (הכיוון משנה - לוקח את הנגזר')
$$\int_c F\,dr=-\int_{-c}F\,dr$$

* משפט גרין מתקיים כאשר העקום חיובי - סובב נגד כיוון השעון

משפט גרין:
$$\oint_c F\,dr=\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

משפט גרין לחישוב שטח:
$$A=\frac{1}{2}\int x\,dy-y\,dx$$

תמשיך סיכום

* גרדיאנט - נחשב נגזרת כיוונית בעזרת גרדיאנט כאשר נתונה פונק' ווקטור כיוון:

1) נחשב את $\nabla f|_{(x_0,y_0)}$

2) נחשב את וקטור הכיוון המנורמל, נחלק את הוקטור בגודל שלו $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\hat{u}$ מנורמל

3) נחשב את המכפלה הסקלרית $\nabla f \cdot \hat{u}$

הגרדיאנט: $\vec{\nabla} f=(f'_x,f'_y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$

* הנגזרת הכיוונית המקסימלית היא בכיוון הגרדיאנט וערכה $\|\nabla f\|$
* הנגזרת הכיוונית המינימלית היא בכיוון הנגדי לגרדיאנט וערכה $-\|\nabla f\|$
* הנגזרת הכיוונית שווה 0 בכיוונים המאונכים לגרדיאנט. (משיק לקווי גובה)
* הגרדיאנט בנק' הוא וקטור במישור yx שכוונו הוא כיוון הנגזרת הגבוהה ביותר בנק'.
* הגרדיאנט מאונך למשיק של קו הגובה בנק'.
* נק' מינימום ומקסימום מוחלט (בתחום חסום וסגור)

1) למצוא נק' קריטיות (נק' המקיימות $f_x=0$, $f_y=0$)

2) מוצאים נק' שפה שבהן עשוי להתקבל קיצון מוחלט:

א. נק' קצה של התחום　　　* לפי שיטת כופלי לגרנז'

* נק' שבהן הנגזרת של הפונק' מתאפסת

3) עושים תחרות בין ערכי הz של הנק' למצוא מינימום ומקסימום מוחלט.

* משפט וירשטרס - פונק' רציפה בתחום חסום וסגור מקבלת בו מין' ומקס' מוחלט.
* מבחן הנגזרת השניה: $\Delta=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}\cdot f_{yx}$

כאשר $\Delta<0$ נק' אוכף　　$\Delta>0$: $0<f_{xx}$ נק' מינימום

$\Delta=0$ אין לדעת　　$f_{xx}<0$ נק' מקסימום.

* שיטת כופלי לגרנז': כאשר יש לנו פונק' $f(x,y)$ ואילוץ $g(x,y)$

מחשבים נק' על אילוץ:　　I $f_x=\lambda g_x$

כלומר גוזרים לפי x,y,λ ומקבלים קשר　　II $f_y=\lambda g_y$

בין הx לy ומציבים במשוואה השלישית　　III $g(x,y)=0$

ואז עושים "תחרות בין ערכי הz כדי לגלות את המינימום והמקסימום.

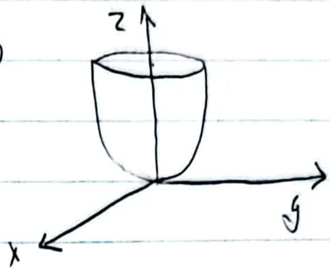
- משתמשים בכופלי לגרנז' כאשר האילוץ הוא ביטוי מסובך שלא רוצים לחפש.

בס״ד

משטח של פונק' של 2 משתנים - דוגמאות ידועות

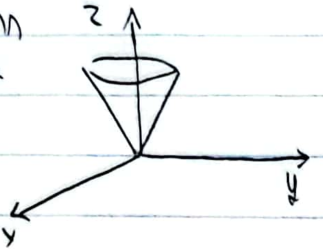
פרבולואיד אליפטי:

$z = x^2 + y^2$



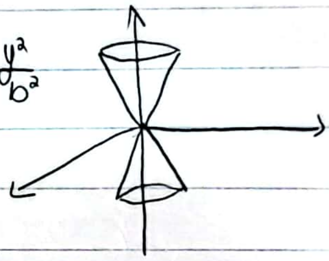
חרוט אליפטי:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



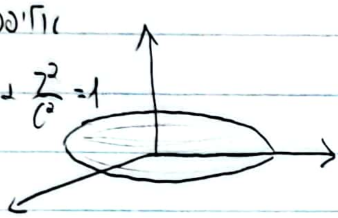
חרוט אליפטי:

$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



אליפסואיד:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



גליל:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$