בס"ד

© אופירה אהרון

סיכום התפלגויות בדידות

* ניסוי ברנולי: ניסוי שיש לו 2 תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כשלון".

- התפלגות בינומית - בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מס' ההצלחות שהתקבלו בסך הכל.
- כדי לדעת שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:
1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X - מונה כמה הצלחות התקבלו בסך הכל.

- התפלגות גאומטרית - חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
X - מונה להיות מס' הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.
תכונות חשובות: אם X מתפלג עפ"י התפלגות גאומטרית אזי הוא בעל תכונת "חוסר זכרון" - כלומר: $*p(X>k) = q^k$, $*p(X=n+k \mid X>k) = p(X=n)$

- התפלגות אחידה - התפלגות זו היא התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים הם החל מ-a ועד b בקפיצות של אחד.

- התפלגות פואסונית - התפלגות זו מאפיינת את מס' האירועים שמתרחשים ביחידת זמן. λ מייצג את התפלגות הזו. מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן, כלומר כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן.
תכונות מיוחדות של התפלגות: בהתפלגות זו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שלנו [illegible], ובנוסף אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

- התפלגות היפרגאומטרית - נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים מתוכם M פריטים בעלי תכונה מסוימת - נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.
X מונה להיות מס' הפריטים המיוחדים שנבחרו.

- התפלגות בינומית שלילית - בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה-r-ית.
X - מס' החזרות עד שהתקבלו r הצלחות.

- התפלגות מעריכית - התפלגות זו נתונה בתרגיל עבור התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד התרחשות מאורע מסוים. פונק' הצפיפות: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
תוחלת: תוחלת $= \frac{1}{\lambda}$. פונק' ההתפלגות המצטברת: $F(t) = p(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

בס"ד

סיכום התפלגויות בדידות

* ניסוי ברנולי - ניסוי שיש לו 2 תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כשלון".

- התפלגות בינומית - ההתפלגות בו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מס' ההצלחות שהתקבלו בסך הכל.
- כדי להגיד שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:
1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X - מוגדר כמס' ההצלחות המתקבלות בסך הכל.

- התפלגות גאומטרית - חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
X - מוגדר להיות מס' הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.
תכונות חשובות: אם X מתפלג עפ"י התפלגות גאומטרית אזי הוא בעל תכונת "חוסר זכרון" - כלומר: $*P(X>k)=q^k$, $*P(X=n+k \mid X>k)=P(X=n)$

- התפלגות אחידה - התפלגות בו הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים הם החל מa ועד b בקפיצות של אחד.

- התפלגות פואסונית - התפלגות בו מאפיינת את מס' המאורעות שמתרחשים ביחידת זמן. λ מייצג את ההתפלגות הזו. מייצג את קצב המאורעות ביחידת זמן, כלומר כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן.
תכונות מיוחדות של ההתפלגות: בהתפלגות בו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שלפיו דנים, ובנוסף אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

- התפלגות היפרגאומטרית - נתונה אוכלוסיה המכילה N פריטים מתוכם M פריטים בעלי תכונה מסוימת - נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסיה n פריטים ללא החזרה.
X מוגדר להיות מס' הפריטים המיוחדים שנבחרו.

- התפלגות בינומית שלילית - ההתפלגות בו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי פעם אחר פעם באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם הr-ית.
X - מס' החזרות עד שהתקבלו r הצלחות.

סיכום - הסתברות

* משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים.
השטח שמתחת לפונק' הצפיפות נותן את ההסתברות.
פונק' צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונק' יהיה תמיד 1.

- פונק' התפלגות מצטברת - $F(t)=p(x\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$
כמו כן: $p(x>t)=1-F(t)$, $p(a<x<b)=F(b)-F(a)$
- תוחלת של משתנה רציף: $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot F(x)dx=\mu$
- שונות של משתנה רציף: $V(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\mu^2=\sigma^2$
- תוחלת של פונק' של x: $E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)dx$

* התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא 0 וסטיית התקן היא 1 והיא מסומנת באות z. משתמשים בנוסחה הבאה: $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$
* תוחלת ושונות של סכום משתנים:
$E[x+y]=E[x]+E[y]$
$V[x+y]=V[x]+V[y]+2cov(x,y)$
תוחלת ושונות של הפרש משתנים:
$E[x-y]=E[x]-E[y]$
$V[x-y]=V[x]+V[y]-2cov(x,y)$

סיכום בקצרה - התפלגויות בדידות:
* התפלגות אחידה - n מאורעות עם הסתברות זהה.
* התפלגות בינומית - מניה של מס' "הצלחות" מתוך n ניסויי ברנולי.
* התפלגות גיאומטרית - מניה של מס' ניסויי ברנולי עד ההצלחה הראשונה.
* התפלגות בינומית שלילית - מניה של מס' ניסויי ברנולי עד ההצלחה ה-r.
* התפלגות היפר גיאומטרית - בחירה של איברים ללא החזרות, מונים כמה מתוכם שייכים לקבוצה מסוימת.
* התפלגות פואסון - מניה של מס' אירועים שמתרחשים בהגדרות מסוימות.
* משתנה מקרי מוגדר ע"י פונק' התפלגות $F(x)$
ומחשבים את פונק' הצפיפות של המ"מ X ע"י $f(x)=F'(x)$
חישוב התוחלת והשונות: $E(x)=\int x\cdot f(x)dx$, $V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

בס"ד

סיכום - הסתברות

* כללי דה מורגן:

* $\overline{A\cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ * $\overline{A\cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

* אם A ו B זרים

1) $A\cap B = \emptyset$ 2) $P(A\cap B) = 0$ 3) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

* כלל החיבור והחסרה: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

* הגדרה של הסתברות מותנית: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$\Downarrow$

* כלל הכפל: $P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B)$

* במאורעות בלתי תלויים: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ * $P(A|B) = P(A)$

* אם x ו y בלת"ים:

1) $E(xy) = E(x)\cdot E(y)$ 2) $cov(x,y) = 0$ 3) $V(x+y) = V(x) + V(y)$

* כלל המכפלה: (עם חזרות) לדוג': קלפים, [illegible]

$n_1\cdot n_2\cdot \ldots \cdot n_k$

* תמורות: $nP_r = \frac{n!}{(n-k)!}$ k מתוך n עצמים
חשוב הסדר, ללא חזרות.

במעגל: $(n-1)!$

* צירופים: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ k מתוך n עצמים
לא חשוב הסדר, ללא חזרות

מסקנות מקומבינטוריקה:

* כשיש n איברים (בלי חזרות) וצריך לסדר אותם בסדר מסוים מס' הסידורים האפשריים יהיה $n!$ (לדוג' סידור 4 ילדים ב4 מקומות).
* כשיש n איברים (עם חזרות) וצריך לסדר אותם לפי סדר מסוים בשורה עם k מקומות. מס' הסדרים האפשריים יהיה n^k (מבחן אמריקאי עם k שאלות ו n אפשרויות תשובה).
* כשיש n איברים (עם חזרות) וצריך לסדר אותם בשורה עם k מקומות אבל מס' החזרות מכל איבר כן מוגבל ב x פעמים. מס' הסידורים יהיה $\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_n!}$
* בוחרים k עצמים מתוך קבוצה של n עצמים, מס' האפשריות שם יהיו [illegible] n מעל k.

בס"ד

הוכחות בהסתברות.

1) * נוסחת ההסתברות השלמה:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\cdot p(A|B_i)$$

אם $B_1,B_2...B_n$ מאורעות זרים, A מאורע מסוים כך ש: $A\subseteq B_1\cup B_2\cup...\cup B_n$

אז מתקיים:

$$p(A)=p(A\cap(B_1\cup B_2\cup...\cup B_n))$$

$$\overset{\text{עפ"י חוק הפילוג}}{=} p((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup...\cup(A\cap B_n)) \overset{\text{איחוד מאורעות זרים}}{=} p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+...+p(A\cap B_n)$$

$$\overset{\text{לפי נוסחת הכפל}}{=} p(B_1)\cdot p(A|B_1)+p(B_2)\cdot p(A|B_2)+...+p(B_n)\cdot p(A|B_n)$$

כלומר:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\cdot p(A|B_i)$$

* נוסחת ב"ס:

$$p(B_j|A)=\frac{p(B_j)\cdot p(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\cdot p(A|B_i)}$$

אם $B_1,B_2...B_n$ מאורעות זרים, A מאורע מסוים כך ש: $A\subseteq B_1\cup B_2\cup...\cup B_n$

אז מתקיים לכל מאורע B_j, $1\le j\le n$.

$$p(B_j|A)\overset{\text{לפי הגדרת הסתברות מותנית}}{=}\frac{p(B_j\cap A)}{p(A)}\overset{\text{לפי נוסחת הכפל}}{=}\frac{p(B_j)\cdot p(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\cdot p(A|B_i)}$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה.

2) * תוחלת של סכום של שני מ"מ (משתנים מקריים) שווה לסכום התוחלות שלהם.

כלומר: $E(x+y)=E(x)+E(y)$

הוכחה: יהיו $x=\langle A,p,h_2\rangle$, $y=\langle A,p,h_1\rangle$ אז -

$$E(x+y)=\sum_{a\in A} p(a)\cdot[h_1(a)+h_2(a)]=\sum_{a\in A} p(a)\cdot h_1(a)+\sum_{a\in A} p(a)\cdot h_2(a)$$

$$=E(x)+E(y)$$ מ.ש.ל.

הערה: מניחים שלמ"מ x ו-y אותה קבוצה A ופונק' p, מ"מ $x+y$ מוגדר כ $x+y=\langle A,p,h_1+h_2\rangle$

5) * משפט: (נוסחה נוספת לחישוב שונות - נוסחה חלופית לחישוב שונות) $V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$

$$V(x)=E[(x-E(x))^2]=E[(x-M)^2]\overset{\text{לפי נוסחת כפל מקוצר}}{=}E[x^2-2Mx+M^2]$$

$$\overset{\text{לפי התכונה שתוחלת של סכום היא סכום התוחלות}}{=}E[x^2]+E[\underbrace{-2Mx}_{\text{מס' קבוע}}]+E[\underbrace{M^2}_{\text{מס' קבוע}}] \overset{\text{לפי התכונות } E(ax)=aE(x)\text{, תוחלת של קבוע היא קבוע } E[b]=b}{=} E[x^2]-2ME[x]+M^2$$

$M=E[x]$

$$=E[x^2]-2(E[x])^2+(E[x])^2=E[x^2]-(E[x])^2$$

הוכחות בהסתברות

6)* משפט: $V(x+y)=V(x)+V(y)+2cov(x,y)$

הוכחה:

לפי נוסחה חלופית לחישוב השונות

$$V(x+y)=E[(x+y)^2]-(E[x+y])^2$$

$$=E[x^2+2xy+y^2]-(E[x]+E[y])^2$$

תוחלת של סכום שווה לסכום התוחלות

$$=E[x^2]+2E[xy]+E[y^2]-[(E[x])^2+2E[x]E[y]+(E[y])^2]$$

סידור איברים המחוברים

$$=\underbrace{E[x^2]-(E[x])^2}_{=V(x)}+\underbrace{E[y^2]-(E[y])^2}_{V(y)}+\underbrace{2(E[xy]-E[x]E[y])}_{2cov(x,y)}$$

3)* תוחלת ושונות למ"מ בינומי

משפט: $E(x)=np$, $V(x)=npq$ כך ש: $q=1-p$

הוכחה: נסתכל קודם במקרה הפרטי כאשר $n=1$, אז פונק' ההסתברות למ"מ בינומי במקרה הזה (נסמן את המ"מ כ-x_1) היא:

x_1	0	1
	q	p

אז:

$$E(x_1)=p$$

$$V(x_1)=E(x_1^2)-(E(x_1))^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

נסתכל כעת על "המקרה הכללי" כאשר n הוא מס' טבעי כלשהו אז:

$$X=x_1+x_2+\dots+x_i+\dots+x_n$$

אז: $E(X)=E(x_1+x_2+\dots+x_i+\dots+x_n)=\underbrace{E(x_1)}_{p}+\underbrace{E(x_2)}_{p}+\dots+\underbrace{E(x_i)}_{p}+\dots+\underbrace{E(x_n)}_{p}=np$

n פעמים

$V(X)=V(x_1+x_2+\dots+x_i+\dots+x_n)=\underbrace{V(x_1)}_{pq}+\underbrace{V(x_2)}_{pq}+\dots+\underbrace{V(x_i)}_{pq}+\underbrace{V(x_n)}_{pq}=npq$

n פעמים מש"ל.

4)* תוחלת של מ"מ גאומטרי -

עבור $X\sim Geo(p)$ נוסחת פונק' ההסתברות של X היא: $p(x=k)=q^{k-1}\cdot p$

משפט: $E(x)=\frac{1}{p}$

הוכחה:

$$E(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(x=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}\cdot p=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}$$

$$=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\cdot\left(\frac{q}{1-q}\right)'$$

סכום של טור גאומטרי אינסופי מתכנס כי מתקיים $0<q<1$

$$q+q^2+q^3=\frac{q}{1-q}$$

$1-q=p$

$$=p\cdot\left(\frac{1(1-q)-q(-1)}{(1-q)^2}\right)=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$$

2023

הוכחות בהסתברות

7) * תוחלת ושונות של מ"מ אחיד (רציף)

הוכחה:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \left[\frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

מ.ש.ל

הסתברות - סיכום

דרכי פתרון לשאלות:

* כאשר נתונה שאלה עם מ"מ X המוגדר ע"י פונקצית צפיפות.

- יש צורך לנרמל (אם נדרש) מכלל $\lim \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- מציאת תוחלת אלגברית $E(x)=\int x f(x)dx$, מציאת שונות $V(x) = E(x^2)-(E(x))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) - (E(x))^2$

בשאלות של הסתברות מותנה - נוסחאות שימושיות:

$$p(B_1|A) = \frac{p(B_1 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(B_1)\cdot p(A|B_1)}{\sum p(B_i)\cdot p(A|B_i)}$$

- מציאת שונות משותפת: $cov[x,y] = E[x\cdot y] - E[x]\cdot E[y]$
- שמבקשים תוחלת של סכום משתנים עושים כפל של כל משתנה עם ההסתברות שלו לצאת ומחברים את הסכומים. ומכפילים את התוחלת שהתקבלה כפול מס' המטבעות שמצוינים.
- כשמבקשים שונות הסתברות של כל המשתנים המקריים עושים כפלה.

תכונות התוחלת:

$E(b) = b$

$E(ax) = a\cdot E(x)$

$E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$

תכונות השונות:

$V(c) = 0$ $\quad V(x) \geq 0$

$V(ax+b) = a^2 \cdot V(x)$

$V(x \pm y) = V(x) \pm V(y)$

הסתברות - איך פותרים ?

* דוגמא לשאלה מס' 3 (תשפ"ג סמ' א', מועד ב')

- כאשר יש שאלה של מקומות או תחנות וכו' כדי לחשב הסתברות נעשה $p=\frac{r}{m}=\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}$
צריך לזכור שמס' האופנים שבהם x אנשים יכולים לשבת ב-y מקומות הוא y^x
וזה בדרך כלל יהיה המצוי.

<u>שאלה לדוגמא</u>

בעיר חדשה בנו מסלול חדש של רכבת קלה. התחנות במסלול הם לפי הסדר הבא: F, E, D, C, B, A. בתחנה A עלו על הרכבת 5 אנשים. הם יורדים מהרכבת באופן אקראי ובלתי תלוי זה בזה. חשב את ההסתברות:

א) שכל האנשים ירדו בתחנות שונות זו מזו.

<u>פתרון</u>

$$p=\frac{r}{m}=\frac{5!}{5^5}=\frac{24}{625}\approx 0.384$$

הסתברות שכולם ירדו בתחנות שונות

המצוי - מס' האופנים ש-5 אנשים יכולים לרדת ב-5 תחנות

<u>שאלה לדוגמא</u>

ב) ההסתברות שכל האנשים ירדו בתחנה אחת בלבד.

<u>פתרון</u>

כולם יורדים בתחנה B/C/D/E/F

$$p=\frac{r}{m}=\frac{5}{5^5}=0.0016$$

מצוי

<u>שאלה לדוגמא</u>

ג) בתחנות E ו F כך שבכל אחת מ-2 התחנות האלה יורד לפחות נוסע אחד

<u>פתרון</u>

מורידים 2 מקרים שלא בתחנה E ו-F

כל נוסע יורד בתחנה F או E

$$p=\frac{r}{m}=\frac{2^5-2}{5^5}=\frac{30}{625}\approx 0.046$$

משמרים כאלה מס' המקומות בהחזקת מס' האנשים. ומחסרים את המקרים שלא עומדים בתנאי.

<u>שאלה לדוגמא</u>

בתחנות B, C, D כך שבכל אחת משלושת התחנות האלה יורד לפחות נוסע אחד

<u>פתרון</u>

נחשב את האפשרויות שיכולות להיות בהתאם לשאלה.

$$r=r_{122}+r_{212}+r_{221}+r_{131}+r_{113}+r_{311}$$

r_{221} מציין מקרה שבו בתחנה B יורד נוסע אחד ובתחנות C ו-D יורדו 2 נוסעים.
וכך שאר המקרים בהתאם.

נחשב את r_{221} - בתחנה B יורדים 2 נוסעים זה ניתן להתממש ב-$C_5^2=10$ אופנים.
אחר בתחנה C יורדים עוד 2 מבין 3 אנשים, $C_3^2=3$ אופנים ונשאר עוד נוסע אחד
מכאן $r_{221}=10\cdot3=30$ ובאופן דומה ניתן לראות שגם $r_{212}=r_{122}=30$
באותו אופן ניתן לראות ש-$r_{311}=r_{113}=r_{131}=20$ סה"כ $r=3\cdot30+3\cdot20=150$
קיבלנו שההסתברות היא:

$$p=\frac{r}{m}=\frac{150}{5^5}=0.048$$

הסתברות - איך פותרים?

* שאלה מס' 1 - סעיף ו' (מתוך מבחן תשפ"ב, סמסטר אביב, מועד א').

- כאשר יש שאלה עם 2 שקיות ובוחרים כדור בצבע מסוים, כאשר מעבירים כדורים מאחת לשנייה ושואלים מה ההסתברות שנבחר כדור בצבע מסוים.

דרך הפתרון:

מחשבים הסתברות של כל מאורע וכן הסתברות של מאורע מסוים בהינתן מאורע אחר ולפי זה מחשבים (A)p שהוא מכפלה מחובר מכפלה.

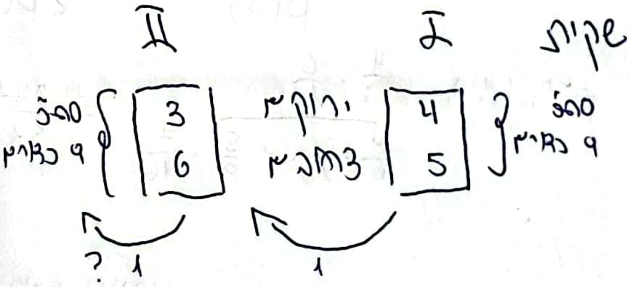
דוגמה לשאלה:

בשקית אחת ישנם 4 כדורים ירוקים ו-5 צהובים

בשקית השנייה 3 ירוקים ו-6 צהובים.

מהשקית הראשונה לוקחים באקראי כדור אחד ומעבירים אותו לשקית השנייה. אחר כך באקראי מהשקית השנייה בוחרים כדור. מה ההסתברות שהוא צהוב?

פתרון:



סה"כ בשתי השקיות
18 כדורים, 7 ירוקים, 11 צהובים.

הגדרות:

B_1 - מהשקית הראשונה נלקח כדור ירוק

B_2 - מהשקית הראשונה נלקח כדור צהוב

A - מהשקית השנייה נלקח כדור צהוב

חישוב ההסתברות:

$p(B_1) = \frac{4}{9}$ ירוק

$p(A|B_1) = \frac{6}{10}$

$p(B_2) = \frac{5}{9}$ צהוב

$p(A|B_2) = \frac{7}{10}$

צריך למצוא את $p(A)$ כלומר:

$$p(A) = p(B_1)\cdot p(A|B_1) + p(B_2)\cdot p(A|B_2)$$

$$p(A) = \frac{4}{9}\cdot\frac{6}{10} + \frac{5}{9}\cdot\frac{7}{10} = \frac{59}{90} \approx 0.656$$

* שאלה מס' 1 - דוגמה נוספת לסעיף ב

דוגמה לשאלה

בקופסה א' ישנם 4 כדורים שחורים ו-2 לבנים, בקופסה ב' ישנם 2 כדורים שחורים ו-4 לבנים. מסדרים באקראי את כל הכדורים, מה ההסתברות שבשורה שנוצרה כל שני כדורים צמודים בצבעים שונים?

דרך פתרון:

הכדורים בצבע x צריכים להמצא במקומות זוגיים וכדורים בצבע y צריכים להמצא במקומות אי זוגיים או להפך. וכל צבע ניתן לסדר ב-!6 אופנים.

$$p = \frac{r}{M} = \frac{2\cdot 6!\cdot 6!}{12!}$$

(r - רצוי; M - מצוי; 2 - במקומות - זוגי או אי זוגי; !6 - כדורים בצבע x; !6 - כדורים בצבע y; !12 - מס' האפשרויות שניתן לסדר 12 כדורים מ-12 מקומות)

הסתברות - איך פותרים

שאלה לדוגמא!

יש במבצע 1000 בקבוקי יין ממפעל לסופרמרקט. לכל בקבוק הסתברות שהוא יתקלקל בזמן ההובלה שווה 0.003. מהי ההסתברות שבמשך ההובלה יתקלקלו 3 בקבוקים. השתמש בקירוב התפלגות הבינומית ע"י פואסונית.

דרך הפתרון

נחשב את X כאשר הוא מתפלג בינומית ואז כדי לעשות קירוב לפואסון
נחשב את X מתפלג פואסונית ואז את $np=\lambda$
ואז כדי למצוא את ההסתברות פשוט נציב בנוסחא של ההסתברות הפואסונית.

פתרון

$$X \sim Bin(n=1000,\ p=0.003)$$

קירוב לפואסון $\Downarrow$

$$X \sim P(\lambda = n\cdot p = 3)$$

הנוסחה:

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow P(X=3) = e^{-3}\cdot\frac{3^3}{3!} = 0.224$$

שאלה מס' 10

שישה אנשים מתוכם אבי וגדי יושבים על ספסל אחד באופן מקרי.
מצאו את ההסתברות שבין אבי לגדי יושבים לפחות שני אנשים.

דרך פתרון

בשאלות מסוג זה נעשה בהסתברות של $p = \frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}$ כלומר מחשבים את גודל המדגם בהתאם לאפשרויות בשאלה ואז מחשבים את מה שמבקשים.

פתרון:

גודל מרחב המדגם: (מס' האפשרויות לסדר בשורה 6 אנשים) $6!$

מס' האפשרויות שבין אבי וגדי אין אף אחד: $2\cdot 5!$ $\boxed{\text{אבי וגדי}}$ _ _ _ _

אבי וגדי או גדי ואבי

ספסל סידור כולם (מתייחסים לאבי וגדי כגוש אחד)

מס' האפשרויות שבין אבי וגדי יהיה בדיוק משהו אחד: $\boxed{\text{אבי ? גדי}}$ _ _ _

$$4\cdot 2\cdot 4!$$

מקומות שבין אבי לגדי

אבי גדי או גדי אבי

ספסל סידור כולם (מתייחסים לשלישיה "אבי?גדי" כגוש)

יש משהו אחד / אין אף אחד

$$P\left(\text{ההסתברות שבין אבי לגדי יהיו לפחות שני אנשים}\right) = 1 - \frac{2\cdot 5! + 4\cdot 2\cdot 4!}{\underset{\text{מרחב המדגם}}{6!}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

הסתברות - איך פותרים?

* שאלה מס' 1 - סעיף ב'

- כאשר יש לנו סעיף שהוא המשך של הסעיף הקודם רק שיש תוספת בנתונים שכעת נותנים שכדור בצבע מסוים נלקח מהשקית השניה וכו' שואלים מה ההסתברות שמהשקית הראשונה נלקח כדור שבצבע X.

דרך הפתרון:

החידוש בסעיף הזה הוא שכעת ידוע נתון מסוים ולכן צריך להשתמש בהסתברות מותנית, בדרך כלל נשתמש בנתונים של סעיף קודם.

דוגמא לשאלה:

בנתוני של הסעיף הקודם הכדור שנלקח מהשקית השניה היה צהוב. מה ההסתברות שמהשקית הראשונה נלקח כדור ירוק?

פתרון:

נשתמש בהסתברות מותנית ובנוסחת בייס.

כאשר ידוע שמהשקית השניה נלקח כדור צהוב הכדור הראשון ירוק

$$p(B_1|A) = \frac{p(B_1 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(B_1)\cdot p(A|B_1)}{\sum p(A|B_i)\cdot p(B_i)}$$

$$p(B_1|A) = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{10}} = \frac{24}{59} \approx 0.407$$

* שאלה מס' 1 - סעיף ג'

- כאשר יש לנו סעיף המשך לשאלה שנתון שהכדורים מונחים בסדר אקראי ושואלים מה ההסתברות שאין 2 כדורים בצבע מסוים שנמצאים אחד ליד השני.

דרך הפתרון:

ההסתברות הנדרשת מחושבת לפי $p=\frac{n}{N}$

את המכנה מוצאים לפי מס' הכדורים סה"כ ומוסיפים עצרת למס' הכדורים המצויים מכיון שיש X כדורים וניתן לתנות אותם ב !X אופנים.

כדי לחשב את n כלומר הרצוי קודם כל מסתכלים על מס' הכדורים בצבע שאין עליו הגבלה וניתן לתנות אותם ב !X אופנים.

לאחר מכן סופרים בכמה מקומות ניתן להניח את הכדורים "הבעייתים", ויש לבחור מתוך המקומות האלה רק את מס' הכדורים הבעייתים כלומר $C^{\text{כדורים בעייתים}}_{\text{מקומות אפשריים}}$ אופנים ואת הכדורים "הבעייתים" ניתן לתנות ב !X אופנים.

דוגמא לשאלה

הכדורים מונחים בסדר אקראי, מה ההסתברות שאין 2 כדורים ירוקים הנמצאים זה ליד זה?

פתרון

$$p=\frac{n}{N}=\frac{C^{\text{מס' הכדורים "הבעייתיים"}}_{\text{מקומות שבהם ניתן להניח אותם}}\cdot \overset{\text{כדורים בעייתיים}}{X!}\cdot \overset{\text{כדורים לא בעייתיים}}{X!}}{\underset{\text{סך כל הכדורים}}{X!}} = \frac{C^{7}_{12}\cdot 11!\cdot 7!}{18!}$$

הסתברות - איך פותרים?

* **שאלה מס' 2 - סעיף א'**

- כאשר נתונה שאלה של משתנה מקרי המוגדר ע"י פונק' צפיפות ומבקשים לחשב את הפרמטר a.

דרך הפתרון:

נתחיל בכך שבמשתנה מקרי רציף מסמנים פונק' צפיפות ב $f(x)$ השטח שמתחת לפונק' הצפיפות נותן את ההסתברות.
פונקציות צפיפות חייבות להיות אי שליליות והשטח הכולל שמתחת לפונק' יהיה תמיד 1.
לכן נשווה את הפונק' ל1 ונמצא את a, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d(x) = 1$

דוגמא לשאלה

משתנה מקרי X מוגדר ע"י פונק' צפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^4} & , x > 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א) חשבו את ערך הפרמטר a

פתרון:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{a}{x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{a}{x^4}\,dx = a\cdot\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{3x^3}\Big|_3^t$$

$$= a\lim_{t\to\infty}\Big[-\underbrace{\frac{1}{3t^3}}_{\to 0} + \frac{1}{3\cdot 3^3}\Big] = \frac{a}{81} \Rightarrow \underline{a = 81}$$

* **שאלה מס' 2 - סעיף ב'**

- כאשר נתונה שאלה של משתנה מקרי רציף ומבקשים לחשב תוחלת ושונות.

דרך הפתרון

תוחלת של משתנה מקרי רציף תחושב באופן הבא: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \mu$

שונות של משתנה מקרי רציף תחושב באופן הבא: $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx - \mu^2 = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

דוגמא לשאלה

חשב את התוחלת $E(X)$ ואת השונות $V(X)$ של המשתנה המקרי X.

פתרון:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_3^{\infty} x\cdot\frac{81}{x^4}\,dx = 81\int_3^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = 81\cdot\lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= 81\cdot\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_3^t = 81\cdot\lim_{t\to\infty}\Big[-\underbrace{\frac{1}{2t^2}}_{\to 0} + \frac{1}{18}\Big] = \frac{81}{18} = \underline{\underline{4.5}}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_3^{\infty} x^2\cdot\frac{81}{x^4}\,dx - 4.5^2 = \int_3^{\infty}\frac{81}{x^2}\,dx - \frac{81}{4}$$

$$= 81\cdot\lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{81}{4} = 81\cdot\lim_{t\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]\Big|_3^t - \frac{81}{4} = 81\cdot\lim_{t\to\infty}\Big[-\underbrace{\frac{1}{t}}_{\to 0} + \frac{1}{3}\Big] - \frac{81}{4}$$

$$= 81\cdot\Big[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big] = \frac{81}{12} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

הסתברות - איך פותרים?

* **שאלה 2 - סעיף ג'**

- כאשר ערכים מס' גבוה של ניסויים בלתי תלויים, ובניסוי מדובר על משתנה מקרי X. בדכ' נשתמש במשפט הגבול המרכזי.

דרך הפתרון:

נגדיר משתנה לדוגמה S שיהיה סכום הערכים שקיבל המ"מ X כך: $S=X_1+X_2+\dots+X_n$
ואותו משתנה מתפלג נורמלית עם n פעמים התוחלת וn פעמים השונות.

דוגמה לשאלה:

עשו 300 ניסויים בלתי תלויים בה בעת, בכל ניסוי המשתנה המקרי X קיבל ערך מסוים. חשב את ההסתברות שסכום של כל הערכים הוא לא יעלה על המס' 1400.

פתרון:

הערך של X בניסוי השני. הראשון.

יהי $S=X_1+X_2+\dots+X_{300}$

סכום הערכים שקיבל מ"מ X בכל 300 הניסויים. לפי משפט הגבול המרכזי:

התוחלת שקיבלנו בסעיף הקודם x 300 · השונות

$$S=N\left(300\cdot 4.5,\left(\sqrt{\tfrac{27}{4}\cdot 300}\right)^2\right)=N(\overset{\mu}{1350},\overset{\sigma}{45}^2)$$

לכן:
$$p(S\le 1400)=\phi\left(\frac{1400-1350}{45}\right)\approx\phi(1.11)\approx\underline{0.8645}$$

* **שאלה 2** - סעיפים נוספים

- הערה: כאשר נתונה לנו פונקציית התפלגות $F(x)$ ומבקשים מאיתנו לחשב את פונק' הצפיפות של המ"מ X נחשב אותו: $f(x)=F'(x)$
- הערה: כאשר נתונה לנו פונק' כלשהי ושואלים אותנו אם היא יכולה להיות פונק' צפיפות של משתנה מקרי. כדי לבדוק זה נציב את קצוות הנגזרת ונבדוק אם יוצא לנו מס' חיובי מכיוון שפונק' צפיפות חייבת להיות **חיובית**
- הערה: כאשר מבקשים מאיתנו למצוא תוחלת/שונות אם מחשבים ויוצא לנו שהאינטגרל מתבדר אז שהתוחלת/השונות לא קיימת.

* **שאלה 2** - סעיף ג' (תשפ"ג, מו' ג', מועד ב')

דוגמה לשאלה: (מו' ג' מועד ב')

חשבו את $p(X>0.25|X<0.75)$

פתרון:

$$p(X>0.25|X<0.75)=\frac{p(0.25<X<0.75)}{P(X<0.75)}=\frac{F(0.75)-F(0.25)}{F(0.75)}\approx 0.778$$

דוגמה לשאלה: (מו' א', מועד א')

חשבו את ההסתברות $p(X>4|X>3)$

פתרון:

$$p(X>4|X>3)=\frac{p(X>4)}{p(X>3)}=\frac{\int_4^\infty f(x)\,dx}{\int_3^\infty f(x)\,dx}=\frac{\int_4^\infty a\cdot\frac{1}{x^3}\,dx}{\int_3^\infty a\cdot\frac{1}{x^3}\,dx}=\frac{\lim_{t\to\infty}\overset{0}{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{16}}{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{9}}=\frac{9}{16}$$

התפלגות - איך פותרים?

שאלה 7

כאשר נתונה לנו שאלה של מציאת פונק' הסתברות משותפת וכן חישוב ההסתברות המשותפת.

שאלה לדוגמה

מתוך ששת המספרים - 1, 2, 3, 4, 5, 6 נבחרו באקראי 2 ספרות ללא החזרה
יהי X - כמות המספרים הזוגיים בין המספרים שנבחרו
יהי Y - כמות המספרים שאינן גדולות מ-4 מבין המספרים שנבחרו.
א) רשום את פונק' ההסתברות המשותפת של הזוג (X, Y)
ב) חשב את השונות המשותפת של הזוג (X, Y)

דרך הפתרון:

כאשר נתונה שאלה שדורשים מאיתנו לחשב את פונק' ההסתברות המשותפת דרך להכין טבלת X וY עם כל האופציות האפשריות ולחשב את ההסתברות של כל אחת מהאופציות. לאחר מכן בכל שורה וטור לחשב את P_x וP_y ולשים לב שהסכום הוא שווה ל1, אחרת יש טעות.
בסוג השאלה כזאת יבקשו מאיתנו לחשב את השונות המשותפת של X וY
נשתמש בנוסחה: $cov(x,y) = E[xy] - E[x]\cdot E[y]$
ומכפילים את המס' כפול ההסתברות שלו. כנל בE[xy] מכפילים את x כפול y כפול ההסתברות.
אם ה $cov(x,y)=0$ זה שהמשתנים בלתי מתואמים
אבל אם המשתנים בלתי תלויים $\Leftarrow cov(x,y)=0$ כלומר השונות המשותפת היא 0.

פתרון:

המספרים הזוגיים 2/4/6
שאינן גדולות מ-4 1/2/3/4
גודל מרחב המדגם: $\binom{6}{2}=15$

כמות המספרים הזוגיים (x); כמות המספרים שאינן גדולות מ-4 (y)

$y \backslash x$	0	1	2	P_y
0	0	6,5 $\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
1	1,5 3,5 $\frac{2}{15}$	25 45 16 36 $\frac{4}{15}$	26 24 $\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	13 $\frac{1}{15}$	12 14 32 34 $\frac{4}{15}$	24 $\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$
P_x	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$	1

$$E[X] = 0\cdot\frac{3}{15} + 1\cdot\frac{9}{15} + 2\cdot\frac{3}{15} = 1$$
$$E[y] = 0\cdot\frac{1}{15} + 1\cdot\frac{8}{15} + 2\cdot\frac{6}{15} = \frac{20}{15}$$
$$E[X\cdot y] = 0 + 1\cdot1\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot2\cdot\frac{2}{15} + 2\cdot1\cdot\frac{4}{15} + 2\cdot2\cdot\frac{1}{15} = \frac{20}{15}$$

$$cov(x,y) = E[xy] - E[x]\cdot E[y]$$
$$cov(x,y) = \frac{20}{15} - \frac{20}{15}\cdot 1 = \underline{0}$$
$\Downarrow$
(x,y) בלתי מתואמים.

הסתברות - איך פותרים?

* **שאלה 2 - סעיף ג'**

- כאשר מדובר על מס' גדול של ניסויים בלתי תלויים, ובניסוי מדובר על משתנה מקרי X בד"כ נשתמש במשפט הגבול המרכזי.

דרך הפתרון:

נגדיר משתנה כלשהו S ששווה לסכום הערכים שקיבל המ"מ X כך: $S=X_1+X_2+\dots+X_n$
אותו משתנה מתפלג נורמלי עם X פעמים התוחלת ו X פעמים השונות.

דוגמא לשאלה:

נעשו 300 ניסויים בלתי תלויים זה בזה לחלוטין, ובכל ניסוי המשתנה המקרי X קיבל ערך מסוים. חשב את ההסתברות שסכום של כל הערכים שהוא קיבל יהיה קטן מ- 1400.

פתרון:

יהי: $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{300}$ (הערך של X בניסוי השני, הראשון)

סכום הערכים שקיבל המ"מ X בכל 300 הניסויים. לפי משפט הגבול המרכזי:

$$S \sim N\Big(\overbrace{300\cdot 4.5}^{\text{התוחלת שקיבלנו בסעיף הקודם x 300}}, \big(\sqrt{\tfrac{27}{4}\cdot 300}\big)^2\Big) = N(\overset{\mu}{1350}, \overset{\sigma}{45}^2)$$

(השונות)

לכן: $P(S\le 1400) = \Phi\left(\frac{1400-1350}{45}\right) \approx \Phi(1.11) \approx 0.\underline{8645}$

* **שאלה 2 - סעיפים נוספים**

- הערה: כאשר נתונה לנו פונקציית התפלגות $F(X)$ ומבקשים מאיתנו לחשב את פונק' הצפיפות של המ"מ X נחשב אותה: $f(x) = F'(x)$
- הערה: כאשר נתונה לנו פונק' כלשהי ושואלים אותנו אם היא יכולה להיות פונק' צפיפות של משתנה מקרי. כדי לבדוק צריך להציב את קצוות ההגדרה ולבדוק אם יוצא לנו מס' חיובי מכיון שפונק' צפיפות חייבת להיות חיובית.
- הערה: כאשר מבקשים מאיתנו למצוא תוחלת/שונות יש מחשבים ויוצא לנו שהאינטגרל מתבדר אז שהתוחלת/השונות לא קיימת.

* **שאלה 2** - סעיף ג' (תשפ"ב, סמ' ו', מועד ו'/6)

דוגמא לשאלה: (סמ' ו' מועד ס')

חשבו את $P(X>0.25|X<0.75)$

פתרון:

$$P(X>0.25|X<0.75) = \frac{P(0.25<X<0.75)}{P(X<0.75)} = \frac{F(0.75)-F(0.25)}{F(0.75)} \approx 0.778$$

דוגמא לשאלה: (סמ' א', מועד א')

חשבו את ההסתברות $P(X>4 | X>3)$

פתרון:

$$P(X>4|X>3) = \frac{P(X>4)}{P(X>3)} = \frac{\int_4^\infty f(x)\,dx}{\int_3^\infty f(x)\,dx} = \frac{\int_4^\infty a\cdot\frac{1}{x^3}\,dx}{\int_3^\infty a\cdot\frac{1}{x^3}\,dx} = \frac{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}-\frac{1}{16}}{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}-\frac{1}{9}} = \frac{9}{16}$$

הסתברות - ז'יק פתרים

שאלה 3 - סעיף לדוגמא

הזמן בשניות שבו שוחה שחיין 200 מ' הוא מ"מ נורמלי. ידוע כי התוחלת של זמן השחיה הוא 104 שניות וההסתברות שזמן השחיה יהיה פחות מ 98 שניות שווה ל 0.25

ג) נבחרו באקראי 50 שחיינים. מהן התוחלת והשונות של מס' השחיינים מתוך קבוצת 50 השחיינים, ששחו 200 מ' בזמן של פחות מ 112 שניות?

דרך הפתרון

ניתן לפתור סעיף זה ב 2 דרכים. דרך ראשונה ע"י התפלגות בינומית. שמשתמשים בכך שהתוחלת $E(x)=np$ והשונות $V(x)=npq$

דרך שניה הוא ע"י שימוש במשפט הגבול המרכזי. מחשבים את ההסתברות להצלחה של משתנה יחיד ע"י התפלגות ברנולית

ואז לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\sum^{n} x_i \sim N(n\cdot\mu,\ n\cdot\sigma^2)$$

$$\sum^{n} x_i \sim N(E(x)=n\cdot\mu,\ V(x)=n\cdot\sigma^2=npq)$$

פתרון:

בסעיפים קודמים מצאנו את הסס"ת תקן, והשתמשנו בכלל $\phi(-t)=1-\phi(t)$ וכן מצאנו את ההסתברות להצלחה של שחיין בודד. (בזמן של יותר מ 112 שניות).

פתרון הסעיף לפי התפלגות בינומית:

$$p(X<112)=1-(ב)=0.8159$$

$$X\sim Bin(n=50,\ p=0.8159)$$

$$E(X)=n\cdot p=50\cdot 0.8159=40.795$$

$$V(X)=npq=50\cdot 0.8159\cdot 0.1841=7.510$$

פתרון הסעיף לפי משפט הגבול המרכזי:

$$X\sim Ber(p=0.8159)$$

$$E(x_i)=p \qquad V(x_i)=pq$$

לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\sum^{n} x_i \sim N(E(x)=n\cdot\mu=n\cdot p,\ V(X)=n\cdot\sigma^2=npq)$$

$$\sum^{n} x_i \sim N(E(x)=50\cdot 0.8159=40.795,\ V(x)=50\cdot 0.8159\cdot 0.1841=7.510)$$

המשך

סיכום התפלגויות בדידות

התפלגות	בינומית	גאומטרית	בינומית שלילית	היפר-גאומטרית
הניסוי	נערכים n ניסויי ברנולי זהים ובלתי תלויים	נערכים ניסויי ברנולי זהים ובלתי תלויים	נערכים ניסויי ברנולי זהים ובלתי תלויים	בוחרים מדגם של n איברים ללא החזרה
המשתנה מקרי (מה) X	X מסמן את מס' ההצלחות במהלך n הניסויים	X מסמן את מס' הסידורי של הניסוי שבו התקבלה ההצלחה הראשונה	X מסמן את מס' הסידורי של הניסוי שבו התקבלה ההצלחה ה-r-ית	X מסמן את מס' הפריטים המיוחדים שנבחרו במדגם
הניסויים בלתי תלויים?	כן	כן	כן	לא - כי בוחרים n איברים ללא החזרה
מס' הניסויים ידוע מראש?	כן - מבצעים n ניסויים	לא - חוזרים על הניסוי עד ההצלחה הראשונה אך לא יודעים מתי היא תתרחש	לא - חוזרים על הניסוי עד ההצלחה ה-r-ית אך לא יודעים מראש מתי היא תתרחש	כן - מבצעים n ניסויים (בוחרים n איברים)
כיצד נזהה באיזה התפלגות מדובר?	מס' הניסויים ידוע מראש הניסויים זהים ובת"ל	מס' הניסויים לא ידוע מראש עד ההצלחה הראשונה	מס' הניסויים לא ידוע מראש. n ניסויים עד ההצלחה ה-r.	נערכים n ניסויים ללא החזרה