סיכום לוגיקה אופרת יהודין.

בס"ד

לזכור!

* אם A אז B - $A\to B$
* A אם B - $B\to A$
* A רק אם B - $A\to B$
* רק אם A אז B - $B\to A$

משפט: אם A אז B

הוכחה \ הפרכה /

נתון: A | דוג' נגדית שבה:

צ"ל: B | $A=T$ | $B=F$

- כיצד נוכיח שקילות?

1) בעזרת טבלת אמת ובדיקה שכל השורות זהות
2) בעזרת שימוש בשקילויות קודמות (נוסחאות)
3) בעזרת תהליך היסק

- ההבדל בין גרירה לוגית לשקילות לוגית:

שקילות לוגית - בכל מקום ש $\alpha=T$ גם $B=T$ וכן בכל מקום ש $\alpha=F$ גם $B=F$.

גרירה לוגית - בכל מקום ש $\alpha=T$ גם $B=T$, אבל בכל מקום ש $\alpha=F$ לא משנה מה B.

- איך נוכיח כי $\{\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n\}\models B$?

נוכיח כי בכל אינטרפרטציה שבה ההנחות אמת גם B אמת. (או להראות שהפסוק $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge...\wedge\alpha_n\to B$ הוא טאוטולוגיה)

- איך נוכיח כי $\{\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n\}\not\models B$?

נראה מודל שבו כל ההנחות $\{\alpha_1...\alpha_n\}$ הן T אבל $B=F$

- הגדרה: טיעון תקף - אומרים שהטיעון הוא תקף אם קבוצת ההנחות גוררת לוגית את המסקנה.
וטיעון לא נקרא תקף אם ההנחות לא גוררות לוגית את המסקנה.

- קבוצות שלמות של קשרים: $\{\neg,\vee,\wedge\}$, $\{\neg,\wedge\}$, $\{\neg,\vee\}$, $\{NAND\ \uparrow\}$, $\{NOR\ \downarrow\}$
- CNF - מכפלה של סכומים $(\vee)\wedge(\vee)$, DNF - סכום של מכפלות $(\wedge)\vee(\wedge)$
- כיצד נתון פסוק מעניין כגון A, $A\vee B$, $A\wedge B$ הוא גם CNF וגם DNF
- שקילויות לוגיות (כל ה"E"ים) ניתן להפעיל גם על חלק מפסוק.
- גרירות לוגיות (כל ה"I"ים) אפשר להשתמש רק על פסוק שלם ולא על חלק ממנו.
- משפט הנאותות: אם $\alpha\vdash T$ אז $\alpha\models T$, מערכת נאותה - כל דבר שמוכח בה הוא נכון.
- משפט השלמות: אם $\alpha\models T$ אז $\alpha\vdash T$, מערכת שלמה - כל דבר נכון אפשר להוכיח בה.
- נאמר כי קבוצת הנחות עקבית אם קיים מודל שבו כל ההנחות הן אמת,
כלומר אם $\alpha_1\wedge\alpha_2...\alpha_n$ מקבל את הערך T (לא סתירה).
- נאמר כי $\alpha_1...\alpha_n$ בלתי עקביות אם הפסוק $\alpha_1\wedge\alpha_2...\wedge\alpha_n$ הוא סתירה. (דוג' $\{A,\neg A\}$)
- הוכחה בדרך השלילה - כדי להסיק מסקנה C מאוסף הנחות, ניתן להוסיף את $\neg C$ כהנחה ולהוכיח ש $\neg C,\alpha_1...\alpha_n$ הן בלתי עקביות.

לזכור!

- הוכחה בדרך השלילה הלוגית: R_4
$T \vdash C$ שקול ל $T \cup \{\neg C\} \vdash F$
- עקרון הדדוקציה: R_3
$T \vdash \alpha \to B$ שקול ל $T \cup \{\alpha\} \vdash B$ (נשתמש בדדוקציה כאשר הגדל חוזר אימוץ).
- הבר עם הכמת לכל $\forall x$ יצא "אימוץ" ועם הכמת קיים $\exists x$ יופיע הקשר "וגם" $\wedge$.
- x חופשי משתנה קשור במ α יש הוא מופיע בצמוד לכמת $\forall$ או $\exists$ או שהוא נמצא בתוך התחום שלהם.
- כאשר מפעילים את R_6 אסור להפעיל את R_8 על כל המשתנים החופשיים בשורה זו.
- כשנשתמש בR_5 נבחר שמות כלליים; כשנשתמש בR_6 נבחר שם קבוע (כמו לזכור שאסור R_8).
- $R_5 - R_8$ הן גזירות לוגיות ולכן אסור להשתמש בהן על תתי נוסחאות.
- כשצריך להפעיל גם R_5 וגם R_6 נפעיל קודם את R_6 ורק אחר כך את R_5 כי אחרי זה אין הגבלות.

* שאלות של הכללים הנכון - טיעון תקף יש המסקנה גוררת לוגית את ההנחות
1. יש מסקנה נובעת מתוך ההנחות.
2. אם ההנחות הן סתירה, לא משנה מה המסקנה - הטיעון תקף תמיד.
3. אם המסקנה טאוטולוגיה, לא משנה מה ההנחות - הטיעון תקף.
4. המסקנה סתירה - וגם גם ההנחות סתירה - הטיעון תקף (לפי 2).
- הנחות שאינן עקביות (סתירה) גוררות כל מסקנה (גם סתירה).
- אם נתון שפסוק c לא נובע מההנחות אז בהכרח מתקיים שההנחות עקביות.
כיוון שאם הן לא היו עקביות-סתירה הן היו גוררות את c.

* משפט עץ של גרפים:
הגרף גרף לא מכוון, כל הוספה של צלע גורמת לאחד ורק לאחד משני הדברים הבאים:
1. יצירת מעגל , 2. הורדת מס' רכיבי הקשירות ב 1.
הוכחה: נוסיף צלע בין הקודקודים w , θ
I אם היה מסלול בין θ לבין w , כעת ישנו המסלול $\theta, w \dots \theta$, כלומר נוצר מעגל.
מס' רכיבי הקשירות לא השתנה כי היה מסלול.
II אם לא היה מסלול בין θ לבין w , אזי w, θ שייכים לשני רכיבי קשירות שונים.
כעת, לאחר הוספת הצלע, שני רכיבי הקשירות הופכים לרכיב קשירות אחד. לא נוצר מעגל.

בס"ד

לסכם - גרפים.

- סכום דרגות הקדקודים הוא פי 2 ממס' הצלעות, כלומר |V| • 2|E|
- בגרף מכוון (גרף שבו לקשתות יש כיוון) - $\sum d_{in}(v) = d_{out}(v) = |E|$ (מס' הצלעות)
- בגרף לא מכוון כל צלע נספרת פעמיים לכן סכום הדרגות הוא זוגי.
וכן יש מס' זוגי של קדקודים שדרגתם אי זוגית.
- מסלול פשוט - במסלול כל הצלעות שונות (לא עוברים על צלע פעמיים) מסלול פשוט זה מסלול שבו גם כל הקדקודים שונים.
- מעגל - הקדקוד הראשון שווה לקדקוד האחרון. מעגל פשוט - כל הקדקודים שונים (חוץ מהראשון והאחרון).
- מרחק בין u לv - המסלול הקצר ביותר בין u לv (אורך מסלול = מס' הצלעות).
- קוטר של גרף - המרחק המקסימלי בין קדקודים בגרף (אם אין מסלול בינהם המרחק הוא ∞).
- גרף (לא מכוון) קשיר / גרף (מכוון) קשיר חזק - יש מסלול בין כל קדקוד לכל קדקוד.
- רכיב קשירות - קבוצה של קדקודים שיש מסלול מכל קדקוד לכל קדקוד.

* בגרף קשיר לא מכוון עם n קדקודים ו m צלעות יש לפחות n-1 צלעות
קשיר => לפחות n-1 צלעות.
* בגרף בעל $n \geq 3$ קדקודים ו- $n \leq m$ צלעות יש מעגל.
לפחות n צלעות => מעגל.
* עץ ≡ גרף קשיר ללא מעגלים => בדיוק n-1 צלעות
* טענה: בגרף G עם n קדקודים, m צלעות וגם $n-1>m$ אז בG יש לפחות n-m רכיבי קשירות.

- מסקנה: בגרף קשיר עם n קדקודים יש לפחות n-1 צלעות.

* טענה: בגרף קשיר לא מכוון עם n קדקודים, m צלעות יש לפחות n-1 צלעות.
* טענה: בגרף בעל $n \geq 3$ קדקודים ו $n \leq m$ צלעות יש מעגל.

- הגרף המשלים של G הוא הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$, שני קדקודים שכנים בG אמ"מ הם אינם שכנים בגרף המשלים.
- אם קיים גרף שהדרגה של כל הקדקודים היא לפחות 2 אז בגרף הזה יש מעגל.
- הגרף הריק = גרף ללא צלעות, הגרף השלם (קליק) = גרף לא מכוון המכיל את כל הצלעות האפשריות.
מס' הצלעות המקסימלי בגרף (מס' הצלעות בגרף שלם) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- גרף הקוביה - הקדקודים הם כל הסדרות האפשריות באורך n של אפסים ואחדות, ויש צלע בין כל זוג קדקודים השונים זה מזה בקורדינטה אחת בדיוק. דרגה של כל קדקוד היא n.
בגרף הקוביה יש 2^n קדקודים ו- $n \cdot 2^{n-1}$ צלעות
- גרף רגולרי - לכל הקדקודים אותה דרגה, גרף k רגולרי - לכל הקדקודים דרגה k.
- גרף דו צדדי - ניתן לחלק את V ל2 קבוצות זרות V_1, V_2 כך שכל הצלעות עוברות בין V_1 לV_2.

בס"ד

לזכור - גרפים

- גרף דו צדדי אמ"מ כל המעגלים שלו באורך זוגי.
- יער - גרף מכוון ללא מעגלים, עץ = יער קשיר (בדיוק n-1 צלעות), עלה = קודקוד בעץ שדרגתו 1.

* בגרף עם n קודקודים m צלעות אין מעגלים => $m \le n-1$
* G עץ קשיר ללא מעגלים => $n-1 = |E|$ מס הצלעות

• התנאים הבאים שקולים:
1. G הוא עץ (G קשיר וללא מעגלים)
2. G הוא חסר מעגלים, אך הוספת צלע כלשהי בין שניים מקודקודיו תיצור מעגל.
3. בגרף G עבור כל זוג קודקודים קיים מסלול (G קשיר) פשוט יחיד (ואין מעגלים) המחבר ביניהם.
4. G קשיר אך הסרת קשת כלשהי ב-G פוגמת בקשירות G.

• משפט "3 במחיר 2":
1. n-1 צלעות
2. קשיר
3. ללא מעגלים

* בגרף קשיר מישורי מתקיים: $m \le 3(n-2)$ (אם השוויון לא מתקיים אז הגרף לא מישורי).
* בגרף דו צדדי מישורי קשיר מתקיים: $m \le 2(n-2)$ (גם נשמש להפרכת קשירות).

- איך נראה שגרף הוא מישורי?
נראה שניתן לצייר אותו על דף בלי ש-2 צלעות נחתכות.
- איך נוכיח כי גרף אינו מישורי?
1. נראה שיש לו תת גרף של $K_{3,3}$, K_5
2. נראה שהוא לא מקיים את השוויון: $m \le 3(n-2)$
3. נראה שהוא דו"צ ולא מקיים את השוויון: $m \le 2(n-2)$

* בכל גרף מישורי קיים קודקוד שדרגתו לכל היותר 5.

- מסלול אוילר - מסלול שעובר בכל צלע בדיוק פעם אחת (כנ"ל מעגל אוילר).

* משפט אוילר - יהי G גרף קשיר לא מכוון, ב-G יש מעגל אוילר אמ"מ כל הדרגות בגרף זוגיות.
* יהי G גרף קשיר מכוון, ב-G יש מעגל אוילר אמ"מ דרגת הכניסה של כל קודקוד = לדרגת היציאה שלו.

- מסקנה: בגרף קשיר לא מכוון יש מסלול אוילר אמ"מ יש בו 0 (יש גם מעגל אוילר)
או 2 (אין מעגל, יש מסלול אוילר) קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.
- מעגל המילטון - מעגל שעובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת (כנ"ל עם מסלול המילטון).
- בגרף עם n קודקודים אם לכל 2 קודקודים לא שכנים מתקיים $deg(x)+deg(y) \ge n$ יש מעגל המילטון.

לוגיקה - שאלות ודרך פתרון.

* בשאלות של הסקה מסוג $\beta \Leftarrow \alpha$ או $\alpha \not\Leftarrow \beta$ הדרך לפעולה היא כזאת:
- כדי לסתור טענה, כאשר כדי לסתור את הטענה $\beta \Leftarrow \alpha$ נצטרך להראות ש$\beta \not\Leftarrow \alpha$ כלומר - להראות אינטרפרטציה שבה $\alpha = T$, $\beta = F$
תמיד בשאלות של הסקה ננסה לקחת קודם דוגמה מסוים ודרכו לסתור את הטענה.
- אם לא הצלחנו לסתור טענה, ננסה להוכיח אותה באמצעות תהליך הסק. הדרך להראות זאת היא להשתמש לפי הסדר בכללי היסק, כלומר 1. הנחות, 2. שקילויות, 3. דדוקציה ודרך השלילה, 4) הסרת והוספת כמתים.
אחרי שמיצינו את 1 נעבור ל2 וכן הלאה.
נשים לב שניתן להשתמש בדדוקציה רק במקרה של $\alpha \to \beta$ שבו כל ביטוי עצמאי ולא תחום ע"י כמת.
אחרי שסיימנו את שלב 3 נעבור לשלב 4 ובו נצטרך שלא לעבור על הכללים של R_6 ו R_8 הבעייתיים. לכן: * נשתמש קודם בכללים "הבעייתיים" - כלומר נפעיל את R_6 לפני R_5 וכן נשתמש בR_8 לפני R_7 ומוקדם ככל הניתן.
* כאשר אנחנו מורידים כמתים נשתמש בשמות פרטיים
+ כדי שלא נשכח את התנאי של R_8 הרגע שנשתמש בR8 נכתוב בצד של המשתנים שאסור להפעיל עליהם את R8.
נשים לב! בגרירות מותר להשתמש רק על נוסחה/שורה שלמה (בשקילויות אין הגבלה).
תזכורת: הוכחה בדרך השלילה: $\Gamma \vdash c$ שקול ל $\Gamma \cup \{\neg c\} \vdash F$
דדוקציה: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ שקול ל $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ (נשתמש בזה כאשר הצד הוא [illegible]).
* בשאלות של מערכת הסק צריך לזכור את הכללים הבאים:
- משפט הנאותות: אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Gamma \Rightarrow \alpha$ (מערכת נאותה - כל דבר שמוכחים בה נכון).
- משפט השלמות: אם ורק אם $\Gamma \Rightarrow \alpha$ אז $\Gamma \vdash \alpha$ (מערכת שלמה - כל דבר נכון אפשר להוכיח בה).
◦ $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ הנחות עקביות אם הפסוק $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ הוא סתירה. (הנחות גוררות כל מסקנה).
טיעון תקף אם המסקנה נגררת לוגית את ההנחות:
1) אם המסקנה נובעת מתוך ההנחות. ($T \to T = T$)
2) אם ההנחות הן סתירה (בלתי עקביות) לא משנה מה המסקנה - הטיעון תקף תמיד ($F \to ? = T$)
3) אם המסקנה טאוטולוגיה, לא משנה מה ההנחות - הטיעון תקף. ($? \to T = T$)
4) המסקנה סתירה - אם גם ההנחות סתירה, הטיעון תקף ($F \to F = T$)
אם נתון שפסוק לא נובע מהנחות זה אומר שההנחות עקביות כי אחרת הן היו גוררות את הפסוק.

תרגול - פתרון שאלות

* בשאלות של- קבוצות שלמות של קשרים - המטרה: לנסות להביא את הקשר ¬ (not) ביחד עם אחד הקשרים ∧ (וגם) או ∨ (או). ואם לא ניתן להביא הקבוצה היא לא קשן. הדרך שעושה היא לנסות להביע $f(x,x,x)$ ולראות אם מקבלים את אחד הקשרים, ואם מקבלים T/F ננסה להביא באמצעותם.

קבוצות שלמות של קשרים: $\{NAND\uparrow\}$, $\{NOR\downarrow\}$, $\{\neg,\to\}$, $\{\vee,F,\to\}$, $\{\neg,\to\}$, $\{\to,\oplus\}$

* בשאלות של CNF $((\vee)\wedge(\vee))$ ו-DNF $((\wedge)\vee(\wedge))$ - לזכור: $A, B\vee A, B\wedge A$ הן גם CNF וגם DNF. בטאוטולוגיה אין CNF, בסתירה אין DNF

* בהוכחות יש שקילות חשובה $x\to(y\to z)\equiv(x\wedge y)\to z$

* צריך לשים לב בהוכחה שצריך לנסות לבדוק טאוט' או סתירה
טאוט' - יש הצבה נכון תמיד, סתירה: ואם $T\to F=\underline{\underline{F}}$
לשים לב בנוסף אם $\{\alpha,\beta\}\vdash\gamma$ אז $\{\alpha,\neg\beta\}\vdash\neg\gamma$
שקול ל $[(\alpha\wedge\beta)\to\gamma]\to[(\alpha\wedge\neg\beta)\to\neg\gamma]$

* הפסוק: $\forall x P(x)\to\exists y P(y)$ נכון תמיד (כי אם זה נכון לכולם בוודאי זה נכון לאחד).

* בשאלות של גרפים תרגיל תמיד לזכור להגדיר כמה שיותר נוסחאות.

* בגרף השלם הדרגה של כל קודקוד היא n-1 והוא גרף רגולרי $|E|=\frac{(n^2-n)}{2}$

* בגרף p רגולרי עם 2p+1 קודקודים p בהכרח זוגי כי: $|E|=\frac{(2p+1)\cdot p}{2}$ = מס' שלם

* מעגל אוילר - כולל את כל הצלעות של הגרף - פעם אחת על כל צלע 
וכדי שזה יתקיים צריך שכל הדרגות יהיו זוגיות וכל הצלעות באותו רכיב קשירות.

* תנאי המילטון: אם לכל שני קודקודים בגרף x,y: $d(x)+d(y)\ge n-1$ אז יש מסלול המילטון.

* קשיר 1 יש רק בגרף שלם. * עץ וקבוצה הן גרפים דו צדדיים.

* בעץ יש מסלול אוילר ואין מעגל אוילר. * גרף דו"צ שלם יחיד זה $K_{1,1}$

* כל גרף המכיל עד 4 קודקודים הגרף המשלים שלהם לא קשיר.

* מס' הצלעות בגרף דו"צ שלם הוא $s\times t$ * גרף דו"צ - כל המעגלים באורך זוגי.

* מסלול אוילר - עוברים על כל הצלעות פעם אחת

* גרף מישורי גורר שקיים קודקוד עם דרגה קטנה או שווה 5.