בס"ד

סיכום:

מערכת משוואות לינאריות

מטריצת המערכת

(דירוג)

- יש שורת סתירה
  - אין פתרון
- אין שורת סתירה
  - מספר השורות שונות מ-0 שווה למס' הנעלמים
    - יש פתרון יחיד
  - מספר השורות שונות מ-0 קטן ממס' הנעלמים.
    - יש אינסוף פתרונות
      - המשתנים החופשיים הם המשתנים שבעמודה שלהם אין איבר מוביל.

בס״ד

משמעויות לפתירת תרגיל לאחר דירוג

1) מספר האיברים המובילים לאחר דירוג שווה למס׳ הנעלמים: יש פתרון יחיד

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

2) מס׳ האיברים המובילים לאחר דירוג קטן ממס׳ הנעלמים

* יש לפחות נעלם אחד חופשי

$\Leftarrow$ יש אינסוף פתרונות

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 8 \end{array}\right)$$

* האיברים החופשיים הם האיברים המתאימים לעמודות שאין להם איבר מוביל.

הערה: התוצאות 1 ו-2 תקפות רק אם אנחנו לא במקרה 3

3) השורה השלישית מציגה $0=1$ כלומר סתירה ולכן אין פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

בס"ד

אלגוריתם - שיטה שני

<u>מטריצה מדורגת:</u>

1) שורה במטריצה שכולה 0 נקראית שורה אפסית.

2) האיבר המוביל בשורה הוא האיבר הראשון בשורה שאיננו 0.

הגדרה: מטריצה מדורגת

1) אם יש שורת אפסים הן למטה

2) כל איבר מוביל נמצא ימינה מהאיבר המוביל בשורה הקודמת.

לדוג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>מטריצה מדורגת קנונית</u>

מדורגת
1) אם יש שורת אפסים הן למטה
2) כל איבר מוביל נמצא ימינה מהאיבר המוביל בשורה הקודמת

קנונית
3) האיברים המובילים שווים ל-1
4) מעל האיברים המובילים יש רק אפסים.

דוג

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

בס"ד

המשך נוסחאות:

* הגדרה וקטורית של המישור:

כל נקודה $P=(x,y,z)$ שנמצאת על המישור חייבת

לקיים את המשוואה: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Pi = \{(x,y,z) \mid a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\}$

כדי למצוא משוואה צריך נקודה מצב ווקטור נורמל.

* מציאת וקטור כיוון ווקטור נורמל:

במשוואה מהסוג $ax+by+c=0$

וקטור כיוון: $u=(-b,a)$

וקטור נורמל: (מאונך לוקטור כיוון) $n=(a,b)$

בס"ד

נוסחאות שימושיות

* אורך של חץ -

אורך של חץ u נקרא הנורמה של u ומסומן $\|u\|$

במרחב: $\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

* נרמול וקטור -

אם נרצה לקבל וקטור יחידה נחלק את הוקטור u באורך (נורמה) שלו.

* מכפלה סקלרית -

$$u\cdot v = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

* מציאת זוית בין שני וקטורים -

$$\cos\alpha = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

* וקטורים אורתוגונלים -

וקטורים שהמכפלה הסקלרית שלהם היא 0.

זה קורה אם הזוית ביניהם היא 90°

* הצגה פרמטרית של ישר -

צריך נקודה (x,y,z) וקטור כיוון (x_0,y_0,z_1)

$$l=\{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+tv \mid t\in\mathbb{R}\}$$

(אם יש 2 נקודות צריך למצוא את כיוון הישר - מחסירים נקודה אחת מהשניה ומקבלים וקטור ונקודה).

* דרך נוספת לכתיבת משוואת מישור -

$$ax+by+cz+d=0$$

אלגברה לינארית

סיכום:

במשוואה מס'ג $ax+by+c=0$

וקטור כיוון $u=(-b,a)$

וקטור נורמל (מאונך לוקטור כיוון) $n=(a,b)$

$A(x_0,y_0)$ $\vec{n}(a,b)$

$\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$

$(x-x_0,y-y_0)\cdot(a,b)=0$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

$ax+by+c=0$

* כדי למצוא את וקטור הנורמל מחליפים את המקומות ומשנים סימן של אחד מהמספרים.
* כדי למצוא משוואה צריך - 1) נקודת מצב, 2) וקטור נורמל
* כדי למצוא הצגה פרמטרית צריך: 1) נקודת מצב, 2) וקטור כיוון.

סיכום זוויות

* הזווית בין שני מישורים:

הזווית בין שני מישורים נחתכים היא הזווית בין שני ישרים המונחים במישורים אלו (אחד בכל אחד מהמישורים) והניצבים לישר החיתוך של המישורים.

* מסקנה: הזווית α בין שני מישורים אשר n_1, n_2 הם וקטורי כיוון הניצבים להם היא הזווית בין וקטורי הכיוון הניצבים למישורים.

כלומר:

$$\cos\alpha = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|}$$

בס״ד

סיכום זוויות

* זווית בין שני ישרים

הזווית בין שני ישרים מוגדרת להיות הזווית החדה
או הישרה 0 שבין וקטורי הכיוון (ע״י הנציגים) של
הישרים. הזווית מוגדרת היטב גם במקרה שהישרים מצטלבים.
אם נתונים וקטורי כיוון של שני הישרים V_1, V_2
אז $\cos\alpha = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{\|V_1\| \cdot \|V_2\|}$ וכך ניתן למצוא את α.

* הזווית בין ישר ומישור -

הזווית בין ישר $\ell = \{(a,b,c)+t(m,n,k) \mid t\in\mathbb{R}\}$
ומישור $Ax+By+Cz+D=0$ היא הזווית בין הישר
והיטל הישר על המישור, כלומר אם נקודת
החיתוך בין הישר למישור היא A ונוריד אנך למישור
מנקודה כלשהי B על הישר שחותך את המישור
בנקודה C, אז הזווית בין הישר למישור
היא: $\alpha = \sphericalangle ABC$ נשים לב כי $\sphericalangle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha$
היא הזווית בין הוקטור הנורמל למישור: (A,B,C)
לוקטור הכיוון של הישר (m,n,k), כלומר:

$$\sin\alpha = \frac{|(A,B,C)\cdot(m,n,k)|}{\|(A,B,C)\|\cdot\|(m,n,k)\|}$$

כי: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

המישור

ניתן להגדיר מישור ע"י נקודה (נקודת מוצא) ושני
וקטורים לא מקבילים u, v (וקטורי כיוון)

איך מוצאים נקודה במישור?

נתונה נקודה $A(x_A, y_A, z_A)$
וקטורים $u(u_1, u_2, u_3)$ לא מקבילים
$v(v_1, v_2, v_3)$
הם מגדירים מישור.

ניתן לומר ש-M שייכת למישור אם קיימים t, s
כך ש: $\vec{AM} = tu + sv$

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$$
$$(x, y, z) - (x_A, y_A, z_A) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$$

תוצאה:

נק' $M(x, y, z)$ שייכת למישור אמ"מ קיימים $s, t \in \mathbb{R}$
כך ש: $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$

לכן המישור הוא: (הצגה פרמטרית של המישור)

$$\{(x_A, y_A, z_A) + t(u_1 u_2 u_3) + s(v_1 v_2 v_3) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

הצגה קרטזית של מישור:

לכל מישור יש כיוון יחיד המאונך לכל ישר במישור
הכיוון הזה נקרא הכיוון הנורמל למישור, וקטור מכיוון
הזה נקרא וקטור נורמל למישור

המשך -

* תכונות של בסיס -

א. בסיס הוא קבוצה פורשת מינימלית - אם נוריד איבר מהבסיס הוא כבר לא יהיה קבוצה פורשת ולהפך - קבוצה פורשת מינימלית היא בסיס.

ב. בסיס הוא קבוצה בת"ל מקסימלית - אם נוסיף איבר לקבוצה היא כבר לא תהיה בת"ל ולהפך - כל בת"ל מקסימלית היא בסיס.

ג. לכל מרחב יש הרבה בסיסים שונים

ד. המימד של מרחב וקטורי V מסומן $\dim V$, והוא הגודל של בסיס V. באופן כללי: מ.ח: $\dim R^n = n$ (המימד של R^n הוא n)

א. לדוג' $\{x^3, x^2, x, 1\}$ בסיס של $R_3[x]$ ולכן $\underbrace{\dim R_3[x]=4}_{\text{שכן יש 4 איברים}}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $M_{2\times2}(R)$ ולכן $\underbrace{\dim M_{2\times2}=4}_{\text{שכן יש 4 מטריצות}}$

באופן כללי $\dim R_n[x]=n+1$

ה. משפט "השליש חינם" - V מרחב וקטורי, $B \subseteq V$ אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים אז B בסיס (וגם התנאי השלישי מתקיים).

1) B פורשת

2) B בת"ל

3) $|B| = \dim V$

בס״ד

לינאריות - תלות לינארית בסיסים וממדים

- קבוצה פורשת: $Z=\{v_1,v_2,...,v_k\}$ נקראת קבוצה פורשת של מרחב וקטורי U אם כל וקטור ב-U הוא צירוף לינארי של הוקטורים ב Z, כלומר $Sp(Z)=U$

* תלות לינארית - V מרחב וקטורי $v_1...v_n \in V$ צירוף לינארי של $v_1...v_n$ נקרא טריוויאלי אם כל הסקלרים הם אפסים. נאמר שקבוצה תלויה לינארית או שהוקטורים תלויים לינארית אם קיים צירוף לינארי $\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n=0$ לא טריוויאלי שמתאפס. הקבוצה בת"ל אם $\alpha_1=...=\alpha_n=0$, $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2=0$

איך נבדוק אם קבוצה היא בת"ל?

1. נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ונדרג, אם אין משתנה חופשי - כלומר בכל עמודה יש איבר מוביל אז הקבוצה היא בת"ל.
2. נשים את הוקטורים בשורות ונדרג, אם אין שורת אפסים - הקבוצה בת"ל אם יש אז היא ת"ל.

* בסיס וממד - $A \subseteq V$ נקראת בסיס של V, אם A בת"ל ופורשת. דוגמה: $V=R^2$ $A=\{(0,1)(1,0)\}$ מצד אחד A פורשת - כל וקטור $(x,y)\in R^2$ אפשר להציג כצירוף לינארי של איברי A: $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$ ולכן $Sp(A)=R^2$ כמו כן A בת"ל, מטריצה $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, אין שורת אפסים ולכן בת"ל, סה"כ A בת"ל ופורשת ולכן בסיס של R^2.

ב"ה

הסבר א

* מוצאים קבוצה פורשת, ע"י חיפוש איבר כללי ומוציאים את הפרמטר מהוקטור שיהיה פרמטר כפול וקטור קבוע והוקטור שקיבלנו זה קבוצה פורשת
* הקבוצה תלויה לינארית אם יש בתוכה וקטור שהוא צרוף לינארי של חבריו.

וכן להפך, הקבוצה בלתי תלויה לינארית אם אין בתוכה וקטור שהוא צרוף לינארי של חבריו.

דוג: הקבוצה $\{v_1=(1,2,0), v_2=(2,4,0), v_3=(0,0,1)\}$

ת"ל כי v_2 צרוף לינארי של חבריו $v_2=2v_1+0\cdot v_3$

* הקבוצה תלויה לינארית אם למערכת יש פתרון יחיד (אם מס' השורות שווה למס' הנעלמים).
* לסיכום:

אם למערכת פתרון יחיד - הקבוצה בת"ל

אחרת - הקבוצה תלויה לינארית.

הערות:

- כל קבוצה המכילה את וקטור האפס היא ת"ל.
- קבוצה שמכילה שני וקטורים ת"ל אם אחד מהם הוא כפולה של השני בסקלר.

מצב הדדי של ישרים

קיימים ארבעה מצבים לישרים:
1) נחתכים , 2) מקבילים , 3) זהים , 4) מצטלבים
איך יודעים ?

האם וקטורי הכיוון מקבילים ?

כן | לא

האם קיימת נק' משותפת ?

כן	לא	כן	לא
זהים	מקבילים	נחתכים	מצטלבים

משפט

* ב R^n קבוצה של n וקטורים פורשת אמ"מ היא בת"ל

משפט: 3 במחיר 2

יהי V מרחב וקטורי ממימד n ותהי B קבוצה של וקטורים בתוך V, אם 2 מהתנאים מתקיימים גם התנאי השלישי מתקיים ואז B בסיס של V:

א. ב B יש בדיוק n וקטורים

ב. B בלתי תלויה לינארית

ג. B פורשת את V.

* קבוצה שמכילה רק את מרחב ה-0 הבסיס שלו זה קבוצה ריקה. ולכן המימד הוא 0.
* כל קבוצה של n+1 (או יותר) וקטורים ב R^n היא תלויה לינארית.

משפט

יהי V מרחב וקטורי מעל R ממימד n

* כל קבוצה של n+1 וקטורים ב V היא ת"ל
* כל קבוצה של n-1 וקטורים (או פחות) אינה פורשת את V.

דוגמא (בוגר לא)
$O = \{1+x,\ 1-x,\ x^2,\ 7+x^2\} \Rightarrow R_2[x]$

$\dim R_2[x] = 3 \Rightarrow$ הקבוצה ת"ל

דוג (ד-2)
$K = \{1+x,\ 2-x^2,\ x^3\}$

$\dim R_3[x] = 4 \Rightarrow$ הקבוצה K לא פורשת את $R_3[x]$

(אם היו בקבוצה יותר מ 4 וקטורים הקבוצה הייתה ת"ל).

בסיס

הגדרות

תלות לינארית

- אם וקטור אחד הוא צרוף לינארי של חברי הקבוצה תלוי

פרישה

יהי V מרחב וקטורי, הקבוצה $K \subseteq V$ תקרא פורשת את המרחב V אם מתקיים: $V = SpK$
כלומר קבוצה פורשת את המרחב אם אוסף הצירופים הלינאריים של הקבוצה נותנת את כל המרחב.

דוג' $D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

נוכיח שהקבוצה D פורשת את $\mathbb{R}^3$, כלומר $SpD = \mathbb{R}^3$

הוכחה: $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

בסיס

בסיס הוא קבוצה $B \subseteq V$ שהיא: (קבוצה פורשת מינימלית).

א. פורשת את V

ב. בלתי תלויה לינארית

המימד

במרחב וקטורי V ניתן להוכיח שלכל בסיס של V יש אותו מס' איברים שנקרא מימד

דוג' $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\qquad$ $\dim \mathbb{R}^n = n$ מימד

דוג' $\dim_2[x] = 3$ $\qquad$ $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ מימד

Scanned with CamScanner

מישור

מעבר מהצגה פרמטרית להצגה קרטזית:

דוגמה: $\pi = \{(3,1,-1)+t(2,-3,1)+s(0,4,2) \mid t,s\in\mathbb{R}\}$

א) $u(2,-3,1)$ ו $v(0,4,2)$ שני וקטורי כיוון

נמצא את וקטור הנורמל ע"י מכפלה סקלרית

$$\vec{n} = \begin{matrix} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{matrix} = (-6-4, 0-4, 8)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-10,-4,8)$$

ב) משוואת המישור:

$$-10(x-3)-4(y-1)+8(z+1)=0$$

$$-10x-4y+8z+30+4+8=0$$

הצגה קרטזית: $\pi = \{(x,y,z) \mid -10x-4y+8z+42=0\}$

מעבר מהצגה קרטזית לפרמטרית (יש 3 דרכים)

דוגמה: $\pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+4z+1=0\}$

א) נבחר 3 נקודות

נציב $x=1$, $y=1$ ונקבל $2-3+4z+1=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow A(1,1,0)$

נציב $x=0$, $y=-1$ ונקבל $0+3+4z+1=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow B(0,-1,-1)$

נציב $x=-2$, $y=-1$ ונקבל $-4+3+4z+1=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow C(-2,-1,0)$

ב) נבחר נק' אחת שתהיה נק' מוצא ואחר כך נמצא וקטורי כיוון

$A=(1,1,0)$ נק' מוצא $\vec{AB}(-1,-2,-1)$ $\vec{AC}(-3,-2,0)$

הצגה פרמטרית: $\{(1,1,0)+s(-1,-2,-1)+t(-3,-2,0) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$

ג) כדי למצוא וקטור מאונך ל (a,b,c) נעשה הפוך ונציב

של 2 פרמטרים ואת השלישי נאפס לדוג' $(-b,a,0)$

מרחבים וקטורים

- אם A קבוצת וקטורים של $\mathbb{R}^n$ ו-A המטריצה שעמודותיה הם וקטורי A.

1) הקבוצה בת"ל אם למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A יש פתרון יחיד

2) הקבוצה פורשת אם לכל $b\in\mathbb{R}^n$ למערכת שמטריצה שלה היא $(A|B)$ יש פתרון.

יש לכך 3 תוצאות:

1) אם ל-A יותר מ-n וקטורים, אז הקבוצה תל"ל. (ל-A יותר עמודות משורות, לכן במערכת ההומוגנית יש יותר נעלמים ממשוואות ולכן יש אינסוף פתרונות).

2) אם ל-A לכל היותר n-1 וקטורים, אז הקבוצה לא פורשת (ל-A יותר שורות מעמודות, לכן יש שורת אפסים ולכן קיים וקטור שלא נותן פתרון).

3) אם ל-A בדיוק n וקטורים, אז הקבוצה פורשת אם"ם היא בת"ל (כאשר מס' הנעלמים שווה למס' המשוואות יש פתרון יחיד להומוגנית אמ"ם יש פתרון לכל מערכת לא הומוגנית, כי המטריצה שקולה לשורה למטריצת היחידה).

משפט: יהי V מרחב וקטורי ממימד n ויהי U תת מרחב של V.

1) $\dim U \le n$

2) $\dim U = n$ אם"ם $U = V$.

בס"ד

המשפט המסכם

התנאים הבאים שקולים עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$

א. A שקולת שורות למטריצת היחידה

ב. A הפיכה

ג. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ יש פתרון יחיד למערכת $Ax = b$

ד. עמודות A בת"ל

ה. שורות A בת"ל

ו. A מכפלה של מטריצות אלמנטריות

ז. הדרגה של A שווה n

* איחוד של תתי מרחבים המשך הבד"כ לא תת מרחב אלא אם כן אחד מהם מוכל בשני.
* פעולות אלמנטריות לא משנות את המרחב
* פעולות שורה משנות את מרחב העמודות
* ישרים/מישורים שעוברים בראשית הם ת"מ
* ישר מאונך למישור אמ"מ הוא מאונך ל-2 וקטורים לא מקבילים במישור.
* אם הדטרמיננטה שווה ל-0 אזי שהמטריצה לא הפיכה.
* אם ב שורות שוות או ב עמודות שוות הדטרמיננטה שווה ל-0.
* מכפלה של מטריצות סימטריות לא סימטרית.
* חיבור של מטריצה ריבועית והשוחלפת סימטרי.
* לכל מטריצה A, $A\cdot A^T$ סימטרית
* $rank(A)=rank(A^T)$
* $rank(A)=rank(2A)$ (מכפלה בסקלר לא משנה).
* מטריצה אלכסונית הפיכה אמ"מ אין לה 0 על האלכסון.
* המטריצות האלמנטריות הפיכות.
* A הפיכה אמ"מ שורות A בת"ל

הוכחה: שורות A בת"ל $\Leftrightarrow$ עמודות A^T בת"ל $\Leftrightarrow$ A^T הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה.

טיפ

* איחוד של תתי מרחבים הוא לא תמיד תת מרחב אלא אם כן אחד מהם מוכל בשני.
* פעולות אלמנטריות לא משנות את המרחב
* פעולות שורה דופקות את מרחב העמודות
* ישרים/מישורים שעוברים בראשית הם ת"מ
* ישר מאונך למישור אמ"מ הוא מאונך ל-2 וקטורים לא מקבילים במישור.
* אם הדטרמיננטה שווה ל-0 אז המטריצה לא הפיכה.
* אם 2 שורות שוות או 2 עמודות שוות הדטרמיננטה שווה ל-0.
* מכפלה של מטריצות סימטריות לא סימטרית.
* חיבור של מטריצה ריבועית והשחלופה סימטרי.
* לכל מטריצה A, $A\cdot A^T$ סימטרית
* $rank(A) = rank(A^T)$
* $rank(A) = rank(2A)$ (מכפלה בסקלר לא משנה).
* מטריצה אלכסונית הפיכה אמ"מ אין לה 0 על האלכסון.
* המטריצות האלמנטריות הפיכות.
* A הפיכה אמ"מ שורות A בת"ל

הוכחה: שורות A בת"ל $\Leftrightarrow$ עמודות A^T בת"ל $\Leftrightarrow$ A^T הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה.

Scanned with CamScanner

מבן

הישר

מעבר בין הצגות

יש נתונה הצגה קרטזית ורוצים למצוא פרמטרית

נתונה הצגה קרטזית $l=\{(x,y)|ax+by+c=0\}$

u (a,b) וקטור נורמל. $(-b,a)$ וקטור כיוון

דוג: $l=\{(x,y)|2x-3y+4=0\}$

$(2,-3)$ וקטור נורמל, $(3,2)$ וקטור כיוון

נציב $y=0$ ונמצא נק $2x-3\cdot 0+4=0$

מצאנו נק מצב $(-2,0)$ $2x=-4 \quad x=-2$

ההצגה הפרמטרית: $l=\{t(3,2)+(-2,0)|t\in R\}$

יש נתונה הצגה פרמטרית ורוצים לעבור לקרטזית

נתונה הצגה פרמטרית $l=\{t(a,b)+(c,d),t\in R\}$

(a,b) וקטור כיוון ; $(b,-a)$ וקטור נורמל

דוג: $l=\{t(1,3)+(5,-2),t\in R\}$

$(1,3)$ וקטור כיוון, $(3,-1)$ וקטור נורמל

משוואת הישר $3(x-5)-1(y-(-2))=0$

$3x-y-17=0$

קיבלנו הצגה קרטזית $l=\{(x,y)|3x-y-17=0\}$

בס"ד

סיכום

מתי נשים וקטורים בעמודות?

עב' בשורות א. לבדוק שקבוצה היא בת"ל - נשים את אברי הקבוצה בעמודות ונדרג. אם אין משתנה חופשי אז הקבוצה בת"ל ולהפך.

ב. למצוא משוואות שמייצגות Sp נשים את אברי A בעמודות ונדרג, אולם בעמודה נוספת נשים וקטור כללי ונדרג, ונדרוש שיהיו פתירות.

ג. לבדוק האם $v \in Sp(A)$ - נשים את אברי A בעמודות ואת v בעמודה נוספת ונדרג. אם אין סתירה - $v \in Sp(A)$ ולהפך.

$$\begin{matrix} a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \\ c & c & c & c & c \\ d & d & d & 0 & 0 \\ e & e & e & 0 & 0 \end{matrix}$$

מרחב השורות $\mathbb{R}^3$

$Sp\{(a,a,a,a,0),(b,b,0,b,b)\}$

מרחב העמודות $\mathbb{R}^5$

$Sp\{(a,b,c,d,e)\}$

דרגת השורות = דרגת העמודות

השאר תלוי לכן הדרגה = 2 $\{(a,b,c,0,0),(a,b,c,d,e)\}$

מסקנות ממבחן:

* לא אם מרחב השורות שווה למרחב העמודות זה לא מחייב שהמטריצה שווה למשוחלפת שלה.
* אם מטריצה לא ריבועית אז לא יתכן שמרחב השורות יהיה שווה למרחב העמודות.
* מימד השורות = למימד העמודות
* מימד זה מס' האיברים בבסיס של מרחב וקטורי
* פורשת זה כל איברי הקבוצה sp, הבסיס זו קבוצה פורשת בלי תלויים. (פורשת מינימלית).
* n משוואות ב m נעלמים אז n שורות ו m עמודות
כלומר משוואות = שורות, נעלמים = עמודות.
מס' משתנים קשורים ≥ מס' המשוואות.
* דרגת המטריצה = מס' השורות הבת"ל
* מימד מרחב הפתרונות = מס' המשתנים החופשיים.

המשך

* כל הישרים והמישורים שעוברים ב(0,0,0) הם תת׳ מרחב
* אם לישרים אין אותו וקטור כיוון ואין נק׳ חיתוך משותפת זה אומר שהישרים מקבילים. וזה אומר שהחיתוך שלהם זה קבוצה ריקה.
* מרחב וקטורי הוא על עצמו גם תת מרחב
* מכפלה של מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה.
* אם מטריצה סימטרית גם המשוחלפת שלה סימטרית
* אם מטריצה סימטרית גם ההפיכה שלה סימטרית
* מטריצה סימטרית כי מטריצה ששווה למשוחלפת שלה.
* קבוצת פתרונות של מערכת לא הומוגנית היא לא תת מרחב (רק תת קבוצה).
* כאשר יש לנו מערכת משוואות בה n נעלמים והמערכת הומוגנית הקבוצת פתרונות של המערכת היא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$
* מימד = מס׳ המשתנים החופשיים.
* מס׳ המשתנים - מימד מרחב הפתרונות (מס׳ משתנים חופשיים) = rankA (מס׳ המשתנים הקשורים: הבסיס).
* מטריצה אלמנטרית היא מטריצה שמתקבלת ממטריצת היחידה ע״י פעולה אלמנטרית אחת על שורותיה.
* מטריצת האפס לא הפיכה.
* סכום של 2 מטריצות הפיכות לא הפיכה

מטריצות

* המטריצה המשוחלפת

$A^T \in M_{n\times m}(F)$ היא המטריצה המתקבלת מהמטריצה A ע"י החלפת תפקידי השורות והעמודות

* A נקראת מטריצה סימטרית אם $A^T = A$

מטריצה סימטרית זה מטריצה ששווה למשוחלפת שלה ולכן המס' שורות והעמודות חייב להיות שווה. (ריבועית).

* משפט: לכל מטריצה ריבועית A: AA^T סימטרית

הוכחה: $(A\cdot A^T)^T \overset{*}{=} (A^T)^T\cdot A^T = AA^T$

$\Rightarrow$ AA^T תמיד סימטרית

(*) לפי משפט $(AB)^T = B^T\cdot A^T$

* לא כל המטריצות הפיכות
* למטריצה הפיכה יש רק מטריצה הופכית אחת.
* משפט: אם A,B מטריצות הפיכות אז גם AB הפיכה ומתקיים: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (הוכחה בעמוד הבא).
* מטריצות אלמנטריות הן הפיכות וכן מכפלה של מטריצות אלמנטריות היא מטריצה הפיכה.
* כשאומרים שמט' שקולת שורה למטריצת היחידה I אז שאפשר להגיע ל-I ע"י סדרה של פעולות אלמנטריות (לפי המשפט המרכזי).

סיכום:

שורות:

מה: נשים וקצורים השורות?

א. להוכיח שקבוצה היא בת״ל - נשים את איברי הקבוצה בשורות המטריצה ונדרג - אם אין שורות אפסים אז הקבוצה היא בת״ל ולהפך (עד״י השורות).

ב. ״לסנן״ קבוצה (פורשת) לבת״ל:
אם נרצה למצוא קבוצה פורשת ובת״ל ל $Sp(A)$ נשים את איברי A בשורות ונדרג, כל שורת אפסים נעיף. ואפשר לקחת את הוקטורים שקיבלנו אחרי הדירוג.