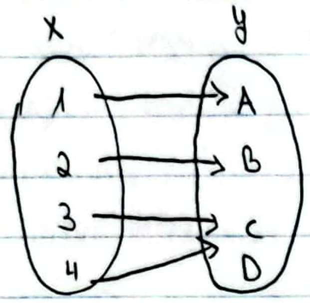
אופרז אחרון

סיכום לינארית ב'

שרטוטים לפונק' להמחשה:

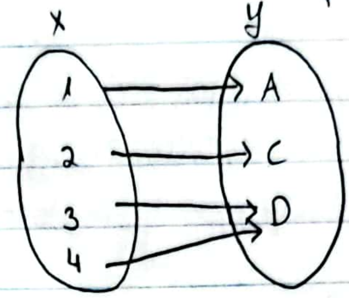
תחום = טווח



$R^n \to R^n$ פונק' שאינה חח"ע ואינה על

תחום > טווח

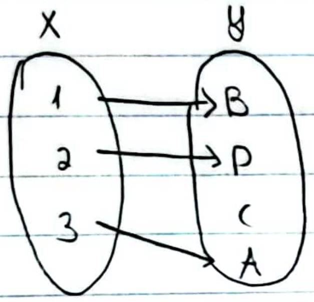
לדוג' $R^4 \to R^3$



פונק' על שאינה חח"ע

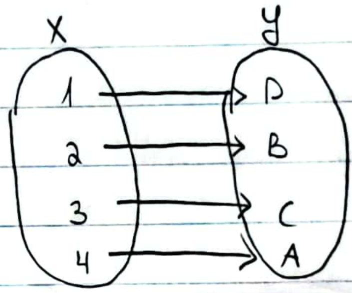
טווח > תחום

לדוג' $R^3 \to R^4$



פונק' חח"ע שאינה על

תחום = טווח



$R^n \to R^n$ פונק' חח"ע ועל

הגדרות ומשפטים:

* חח"ע: $f:A\to B$ תקרא חח"ע אם לכל $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ המקיימים $f(x_1)=f(x_2)$ אז $\Rightarrow x_1 = x_2$
* על: פונק' תקרא על אם לכל איבר בטווח (y) של הפונק' מתאים לפחות איבר אחד מהתחום (x).
* ה"ל הוא חח"ע $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ (אז הגרעין הוא 0).
* T היא על $\Leftrightarrow$ $\dim W = \dim \operatorname{Im} T$ (כלומר מימד התמונות = למימד הטווח והגרעין הוא 0.).
* אם מימד התחום גדול ממימד הטווח הפונק' לא חח"ע
* אם מימד הטווח גדול ממימד התחום הפונק' לא על
* כאשר יש ה"ל ממרחב סופי למרחב עם אותו מימד אז העתקה הזו חח"ע ועל.
* אם העתקות הן מוגדרות מימד לאותו מימד אז העתקה על $\Leftrightarrow$ היא חח"ע.
* העתקה לינארית חח"ע ועל נקראת הפיכה. (נקראו גם איזומורפיזם).
* משפט שיבוק הינם: יהיו V,V מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה כך ש: $n = \dim V = \dim V$ תהי $T: V \to V$ ה"ל אז T חח"ע אם ורק אם T על.

בס"ד

סיכום - לינאריות

העתקה לינארית - תזכורת!

1. אם העתקה מוגדרת על בסיס, אז היא יחידה.
2. אם העתקה מוגדרת על קבוצה גדולה מבסיס אז צריך לבדוק אם הלינאריות נשמרת. אם כן (ונשארית הגדרה על בסיס) אז העתקה יחידה.
3. אם העתקה מוגדרת על קבוצה קטנה מבסיס אז יתכן שיש לינאריות (אם אין סתירה) אבל היא לא יחידה.

על מסכם:

תהי העתקה $T: V \to W$

נבדוק אם הוקטורים ב-V הם בת"ל בדרך הבאה:
נציב את הוקטורים מ-V במטריצה ואת הוקטורים מ-W במטריצה מימין
נדרג את המטריצה משמאל ומימין בהתאם.

במקרה שיש שורות שהתאפסו במטריצה השמאלית - נבדוק אם התאפסו יותר שורות במטריצה השמאלית מאשר בימנית

אם כן - קיבלנו סתירה
אין העתקה!

אם לא - בודקים את מס' השורות שלא התאפסו במטריצה השמאלית ביחס למימד V

אם אין שורות משמאל שהתאפסו

נבדוק את מס' השורות שלא התאפסו במטריצה הימנית.

מס' השורות שלא התאפסו קטן ממימד של V -
יש אינסוף העתקות לינאריות!

מס' השורות שלא התאפסו שווה למימד V -
יש העתקה יחידה!

לינארית - סיכום

* $z = x+iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $|z|^2 = x^2+y^2$
* פתרונות מרוכבים באים בזוגות
* מעבר מהצגה אלגברית לקוטבית:
  $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ (כאשר z ברביע II, III מוסיפים $180°$)
* זהות אוילר: $r \operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$
* בחיבור החלק המדומה מצטמצם, בחיסור החלק הממשי מצטמצם.
* נוסחת דה מואבר: אם $z = r\operatorname{cis}\theta$ אז $z^n = r^n \cdot \operatorname{cis}(n\theta)$
  למשוואה יש n פתרונות.
* לכל $1<n$ סכום שורשי היחידה מסדר n הוא 0.
* המימד של $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ הוא n.
* המימד של $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{R}$ הוא 2n.
* אם $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל $\Rightarrow$ $\{v_1,...,v_n\}$ בת"ל (ההפך לא נכון).
* $\ker T$ הוא תת מרחב של התחום
* $\operatorname{Im}T$ הוא תת מרחב של הטווח.
* מימד הפתרון = מס' המשתנים החופשיים.
* מימד התמונה = מס' המשתנים הקשורים, כלומר מס' השורות הבת"ל.
* משפט המימדים: $\dim V$ (מס' המשתנים) = $\dim \operatorname{Im}T$ (מס' המשתנים הקשורים) + $\dim\ker T$ (מס' המשתנים החופשיים)
* מעבר מבסיס לבסיס $[T]_B^B = M_B^C \cdot [T]_C^C \cdot M_C^B$
* כדי להראות שהעתקה יחידה צריך להראות שהיא מוגדרת על בסיס
* $\operatorname{Im}T = sp\{\text{עמודות}\}$
* כל מטריצת מעבר היא ריבועית ושונה מ-0 (לא כל מטריצה ריבועית היא מעבר).
* אם A מטריצת מעבר אז גם A^{-1} מטריצת מעבר
* הדטרמיננטה של מטריצה אלכסונית היא מכפלת איברי האלכסון.
* אם להעתקה לינארית יש בסיס עצמי אז ההעתקה נקראת לכסינה.
* ריבוי גאומטרי של ע"ע λ הוא המימד של המרחב העצמי V_λ (מס' המקדמים הבת"ל).
* העתקה T לכסינה אמ"מ הריבוי האלגברי = לריבוי הגאומטרי
* אם A ו-B מטריצות המייצגות את אותה העתקה בבסיסים שונים אז הן דומות.
* מטריצה A נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית
* מטריצה A לכסינה אם יש בסיס של ע"ע.

סיכום

לינארית - סיכום

* הפולינום האופייני אינו תלוי בבחירת הבסיס
* אם כל הע"ע ממשיים שונים זה מזה => יש בסיס עצמי => ניתנת ללכסון.
* A הפיכה <= $\lambda \neq 0$
* אם A מכילה שורה או עמודת אפסים אז 0 הוא ע"ע של A.
* כל שני וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים בת"ל.
* למטריצות דומות יש אותם ע"ע ואותה דטרמיננטה (אותו פולינום אופייני).
* אם A מטריצה משולשית או אלכסונית (כנ"ל) אז A הפיכה.
* אם וקטור נמצא בתוך תת מרחב המוכל שלו אז הוא עצמי!
* היטל של אנך על תת מרחב הוא 0.
* הדטרמיננטה של מטריצת היטל = תמיד 0.
* וקטורי הבסיס של U הם ו"ע השייכים לע"ע 1.
* וקטורי הבסיס של $U^{\perp}$ הם ו"ע השייכים לע"ע 0.
* הע"ע של מטריצת שיקוף (בכל בסיס שהוא) הם $\lambda=1$, $\lambda=-1$.
* דטרמיננטה של מטריצת סיבוב תמיד = 1.
* לטרנספורמציית סיבוב יש ע"ע רק אם $\theta=0/\pi$ אחרת אין ע"ע ממשיים.
* בישר יש וקטור כיוון 1, במישור יש 2 וקטורי כיוון.
* אם הע"ע אינם 0/1 אז המטריצה לא היטל.

בס"ד

לינארית סיכום

* תהליך גרם שמידט-

שלב 1: נסמן $f_1 = g_1$ ברור ש- $Sp\{f_1\} = Sp\{g_1\}$

שלב 2: נחליף את g_2 בוקטור שמאונך ל- f_1, ושם כך נטיל את g_2 על f_1 כדי לקבל $\Delta \perp g_2 - P_{f_1}(g_2)$, נבחר $f_2 = \Delta$, כלומר:

$$f_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1$$

שלב 3: נחליף את g_3 בוקטור f_3 שמאונך ל- f_1 ו- f_2, ושם כך נטיל את g_3 על $Sp\{f_1, f_2\}$ כדי לקבל: $\Delta \perp g_3 - P_{Sp\{f_1,f_2\}} g_3$, נבחר $f_3 = \Delta$,

$$f_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1 - \frac{\langle g_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \cdot f_2$$

בשלב ה-k:

$$f_k = g_k - \frac{\langle g_k, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1 - \frac{\langle g_k, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \cdot f_2 - \frac{\langle g_k, f_{k-1} \rangle}{\langle f_{k-1}, f_{k-1} \rangle} \cdot f_{k-1}$$

מטריצות "יצוג":

* כאשר אנחנו מתבקשים למצוא מטריצה "יצוג" של הבסיס עצמו לדוג'- מטריצה מייצגת $[T]_F^F$ עבור הבסיס $F = (f_1, f_2, f_3)$ אז אנחנו מפעילים את ההעתקה על כל אחד מוקטורי הבסיס ואז נכתוב כל וקטור שהתקבל כצירוף לינארי של איברי הבסיס, נמצא לכל וקטור את וקטור הקואורדינטות בעזרת מערכת משוואות ואז את וקטורי הקואורדינטות שהתקבלו נכתוב כעמודות במטריצה והמטריצה שהתקבלה היא מייצגת ההעתקה.
* כדי להראות שהעתקה T היא לכסינה אנחנו מבצעים את ההעתקה על בסיס אחר ואם נקבל שהתקבלה לנו מטריצה אלכסונית אז ההעתקה לכסינה, כיוון שאנחנו מראים שקיים בסיס למרחב המורכב מו"ע.
* כאשר יש לנו בסיס U אז $U + U^\perp$ משלימים לכל המרחב, כדי למצוא את U מציבים במשוואת התמונה (הכ"ז) כדי למצוא את $U^\perp$ מוצאים את הגרעין. מגדירים את הבסיס ע"י $U^\perp + U$ ההעתקות הרגילה היא עם הווקטורים כמו U ו- $U^\perp$ אפסים במטריצה והעתקת השיקוף היא כמו ההעתקה הרגילה רק שב- $U^\perp$ יש 1- במקום 0 במטריצה.

בס"ד

לינארית - סיכום

משפטים להוכחה:

* תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. אזי T חד חד ערכית אם ורק אם $KerT=\{0\}$.

הוכחה:

- נניח ש-T חח"ע. יהי $u\in KerT$, אזי $T(u)=0=T(0)$
מכך ש-T חח"ע נובע ש-$u=0$, ומכאן ש-$KerT=\{0\}$.
- כיוון שני: נניח ש-$KerT=\{0\}$. יהיו $u_1,u_2\in V$ כך ש-$T(u_1)=T(u_2)$
אזי $T(u_1)-T(u_2)=0$ לכן: $T(u_1-u_2)=0$
לכן $u_1-u_2\in KerT$, אבל לפי ההנחה $KerT=\{0\}$
ומכאן ש-$u_1-u_2=0$ כלומר $u_1=u_2$
(שכן בעצם ההגדרה של חח"ע שבה מתקיים $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$).

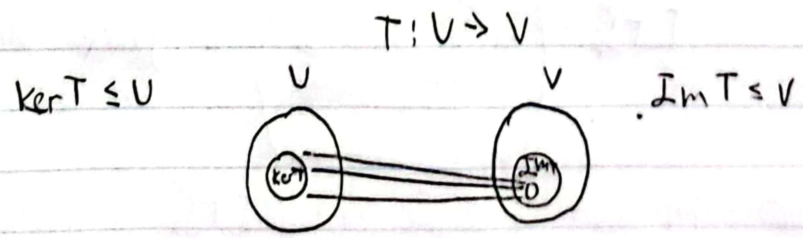
* אם V מרחב וקטורי ממימד n ו- $T:V\to V$ העתקה לינארית אזי T חח"ע אם ורק אם T על. (משפט שאפשר להוכיח בעזרת משפט המימדים).

הוכחה:

- כיוון ראשון: נניח ש-T חח"ע אזי $KerT=\{0\}$ ולכן $DimKerT=0$
אבל לפי משפט המימדים: $DimKerT+DimImT=n$
לכן $DimImT=n=DimV$, כיוון ש-$ImT\le V$ (מרחב התמונות קטן או שווה) ו- $DimImT=DimV$
הרי $ImT=V$ ומכאן ש-T על.
- כיוון שני: נניח ש-T על, אזי $ImT=V$ (התמונות שווה למרחב) לכן $DimImT=n$
אבל לפי משפט המימדים $DimKerT+DimImT=n$ לכן:
$DimKerT=0$ ולכן $KerT=\{0\}$ ומכאן ש-T חד חד ערכית.

* הערה: פונקציה שהיא חח"ע ועל נקראת הפיכה ($\det T\neq 0$ כשמדובר במטריצה).

כדאי לזכור להמחשת המשפט:



לינארית - סיכום

* משפט פיתגורס למכפלה פנימית:

אם $\langle v,w\rangle=0$ אז $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$

הוכחה:

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2Re(x,y)+\|y\|^2 \overset{(*)}{=} \|x\|^2+\|y\|^2$$

מכיון ש $(x,y)=0$.

* משפט: הפולינום האופייני אינו תלוי בבחירת הבסיס. כלומר אם A,B מטריצות המייצגות את אותה העתקה לינארית T בבסיסים שונים אז:

$$Det(A-\lambda I)=Det(B-\lambda I)$$

הוכחה:

נסמן $A=[T]_F^F$, $B=[T]_E^E$

A,B דומות, לכן $A=P^{-1}\cdot B\cdot P$

$$|A-\lambda I|=|P^{-1}\cdot B\cdot P-\lambda \overset{P\cdot P^{-1}}{I}|=|P^{-1}\cdot B\cdot P-\lambda P\cdot P^{-1}|$$
$$=|P^{-1}(B-\lambda I)P|=|P^{-1}|\cdot|B-\lambda I|\cdot|P|=\underbrace{|P^{-1}|\cdot|P|}_{1}\cdot|B-\lambda I|$$
$$=|B-\lambda I|$$

* משפט: אם להעתקה לינארית T יש בסיס עצמי F אז $[T]_F^F$ מטריצה אלכסונית. הערכים העצמיים של T נמצאים באלכסון.

הוכחה:

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, $\lambda_1,\lambda_2...\lambda_n$ ערכים עצמיים של T.

$v_1,v_2...v_n$ וקטורים עצמיים המתאימים להם.

$$T(v_1)=\lambda_1 v_1=\lambda_1 v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3+\dots+0\cdot v_n=(\lambda_1\ 0\ 0\ 0\dots 0)$$
$$T(v_2)=\lambda_2 v_2=0\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2+0\cdot v_3+\dots+0\cdot v_n=(0\ \lambda_2\ 0\ 0\ 0\dots 0)$$
$$T(v_n)=\lambda_n v_n=0\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3+\dots+\lambda_n v_n=(0\ 0\dots 0\ 0\ \lambda_n)$$

אז קיבלנו כי: $[T]_F^F=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \lambda_2 & & \vdots\\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$

קיבלנו ש $[T]_F^F$ מטריצה אלכסונית שהע"ע נמצאים באלכסון.